I – 1.1 Methode $\frac{\Delta y}{\Delta x}; f'(x_0)$

Erklären Sie, mit welcher Grundidee die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 definiert ist?

I – 1.1 Methode $\frac{\Delta y}{\Delta x}; f'(x_0)$

Man bildet den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und dann den Grenzwert für $\Delta x \to 0$. Wenn dieser Grenzwert existiert, nennt man dies $f'(x_0)$.

I – 1.1 Beispiel $\frac{\Delta y}{\Delta x}; f'(x_0)$

Zusatz: Bestimmen Sie – ohne Anwendung der Ableitungsregeln – die Ableitung $f'(2)$ der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = 2$.

I – 1.1 Beispiel $\frac{\Delta y}{\Delta x}; f'(x_0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \ldots = \frac{h^2+4h}{h} = h + 4$$

$$\lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

I – 1.2 Methode *grafische Ableitung*

Wie geht man vor, wenn man, ausgehend vom Schaubild der Funktion, grafisch das Schaubild der Ableitung zeichnen soll?

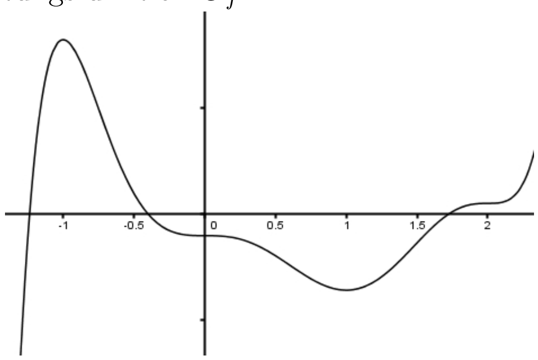
I – 1.2 Methode *grafische Ableitung*

1. Man untersucht die Stellen mit $f'(x_i) = 0$ und markiert diese Stellen auf der x-Achse.

2. Man berücksichtigt den entsprechenden VZW an diesen Stellen und zeichnet die Ableitungsfunktion ein.

I – 1.2 Beispiel *grafische Ableitung*

Gegeben ist G_f. Skizzieren Sie das Schaubild der Ableitungsfunktion $G_{f'}$.



I – 1.2 Beispiel *grafische Ableitung*

I – 1.3 Methode *grafische Aufleitung*

Wie geht man vor, wenn man, ausgehend vom Schaubild der Ableitungsfunktion, grafisch das Schaubild einer Aufleitungsfunktion erstellen soll?

 3

I – 1.3 Methode *grafische Aufleitung*

1. Spätere Hop/Tip als Senkrechte markieren = Stellen mit $f'(x) = 0$ und VZW

2. Extremstellen von f' (spätere Wep) als Senkrechte markieren

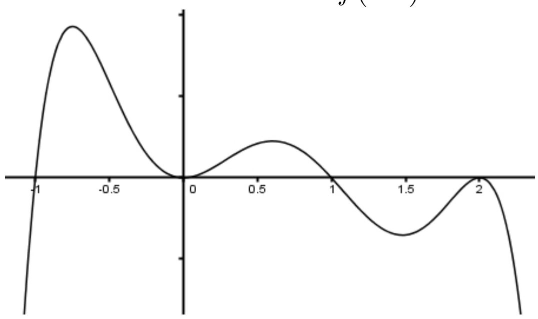
3. Eine Randbedingung als Punkt markieren

4. Alle Infos sinnvoll verbinden / verarbeiten.

 3 - Lösung

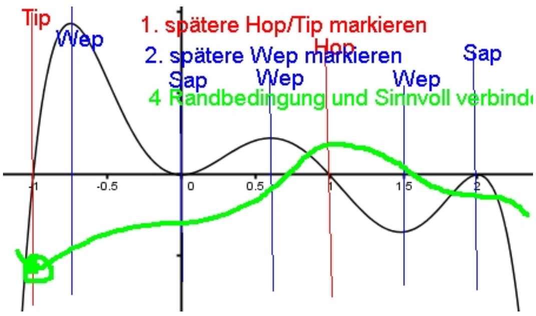
I – 1.3 Beispiel *grafische Aufleitung*

Gegeben ist das Schaubild einer Ableitungsfunktion f'. Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f mit $f(-1) = -3$.



 3

I – 1.3 Beispiel *grafische Aufleitung*



 3 - Lösung

I – 2.1 Beispiel *Ableitungsregeln*

Bilden Sie die erste Ableitung (ohne Quotienten- oder gar Produktregel !!!):

$$f(x) = \frac{6x^3 + 2x^2 + 4x}{2x}. \ (19/2f)$$

 4

I – 2.1 Beispiel *Ableitungsregeln*

$f(x) = 3x^2 + x + 2$
$f'(x) = 6x + 1$

 4 - Lösung

I – 2.2 Beispiel *Ableitungsregeln*

Bilden Sie die erste Ableitung:

$f_t(x) = tx^3 + 3tx^2 - 17x + t$. (19/5b)

 5

I – 2.2 Beispiel *Ableitungsregeln*

$f_t'(x) = 3tx^2 + 6tx - 17$

 5 - Lösung

I – 2.3 **Methode** *Berührung …*

Die Schaubilder der Funktionen f und g

(a) berühren sich
(b) schneiden sich orthogonal
in einem Punkt P.

Beschreiben Sie, welche Bedingungen erfüllt sein müssen.

I – 2.3 **Methode** *Berührung …*

Für die Berührung:
1. $f(u) = g(u)$, d.h. Schnittbedingung, und
2. $f'(u) = g'(u)$, d.h. gleiche Steigung

für den orthogonalen Schnitt:
1. $f(u) = g(u)$, d.h. Schnittpunkt und
2. $f'(u) \cdot g'(u) = -1$, d.h. orthogonale Steigung

Bemerkung: Falls eine der Funktionen eine Funktionenschar f_t ist, ergibt sich damit ein Gleichungssysteme (2 Gl mit 2 Var u und t); Lösung: späteren Berührstellen u und Scharparameter t.

I – 2.3 **Beispiel** *Berührung …*

(a) Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x^3 - x$ und g mit $g(x) = -x^2 + 4x - 3$. Zeigen Sie, dass sich ihre Graphen berühren.

(b) Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x^3$ und g mit $g(x) = -ax^2 + 2$. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass sich die Schaubilder von g und f orthogonal schneiden. (GTR)

I – 2.3 **Beispiel** *Berührung …*

a) $f' = g' \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{5}{3}$ mögl. Bstellen;
da $f(1) = g(1) = 0$ ist diese Stelle eine Berührstelle,
während $x_2 = -\frac{5}{3}$ mit $f(-\frac{5}{3}) \neq g(-\frac{5}{3})$ keine Berührstelle ist.

b) $f' = -\frac{1}{g'}$ führt zu $a = \frac{1}{6x^3}$ (1.Gl);
$f = g$ und (1.Gl) eingesetzt: $x^4 - 2x + \frac{1}{6} = 0$,
mit GTR gelöst: $x_1 = 0,0833; a_1 = 287,75$ und
$x_2 = 1,286; a_2 = 0,07836$

I – 3 **Methode** *Krümmung*

Wie ist die Rechts- bzw. Linkskurve eines Graphen festgelegt?

I – 3 **Methode** *Krümmung*

Eine (math. negative) Rechtskrümmung (im Uhrzeigersinn) liegt vor, wenn
1. die Tangentensteigung kleiner wird
oder 2. f' monoton fallend ist
oder 3. f'' negativ ist.
Beispiel: $y = -x^2$

Analog gilt für die Linkskrümmung:
f' monoton steigend oder $f'' > 0$
Beispiel: $y = x^2$.

I – 3 **Beispiel** *Krümmung*

Es ist $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{5}{3}$. Überprüfen Sie rechnerisch auf Links- bzw. Rechtskurve. (23/8b)

I – 3 **Beispiel** *Krümmung*

$f''(x) = 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$,
d.h. für $x > 1$ Linkskurve,
für $x < 1$ Rechtskurve

I – 4 METHODE *Extrema*

Wie geht man vor, wenn man eine Funktion auf Extremstellen untersuchen muss?

I – 4 METHODE *Extrema*

1. notwendige Bedingung:
$f'(x) = 0 \Rightarrow$ mögliche Extremstellen x_i

2. hinreichende Bdg:
(2.a) VZW von f' an der Stelle x_i;
falls $\oplus \to \ominus$: HOP, falls $\ominus \to \oplus$: TIP

oder (2.b) $f''(x_i) < 0$: HOP; $f''(x_i) > 0$: TIP
falls $f''(x_i) = 0$ muss man (2.a) durchführen!

I – 4 BEISPIEL *Extrema*

Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. (27/7a)

I – 4 BEISPIEL *Extrema*

$x = 0$ HOP-Stelle;
$x = 1$ TIP-Stelle

I – 5.1 METHODE *Wendepunkte*

Wie geht man vor, wenn man eine Funktion auf Wendepunkte untersuchen muss?

I – 5.1 METHODE *Wendepunkte*

1. notwendige Bedingung:
$f''(x) = 0 \Rightarrow$ mögliche Wendetellen x_i

2. hinreichende Bdg:
(2.a) VZW von f'' an der Stelle x_i

oder (2.b) $f'''(x_i) \neq 0$: WEP
falls $f'''(x_i) = 0$ muss man (2.a) durchführen!)

I – 5.1 BEISPIEL *Wendepunkte*

Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion f mit $f(x) = -0,5x^4 + 2x^2$. (30/6b)

I – 5.1 BEISPIEL *Wendepunkte*

notw: $f''(x) = -6x^2 + 4 = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2/3}$ mögl. Wep

hinr: $f'''(x) = -12x; f'''(x_i) \neq 0$
$\Rightarrow W_{1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{10}{9}\right)$

I – 5.2 Methode *Wendetangente*

Wie geht man vor, wenn man die Wendetangente eines Schaubilds bestimmen soll? (mit/ohne GTR)

I – 5.2 Methode *Wendetangente*

1. Wep bestimmen $W(x_W|y_W)$
2. mit dem GTR die Tangente bestimmen oder von Hand:
(PSF) $m = f'(x_W); y = m(x - x_W) + y_W$

I – 5.2 Beispiel *Wendetangente*

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkte des Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 0,75x^2 + 2$. (31/11a)

I – 5.2 Beispiel *Wendetangente*

$W(1,5|\frac{7}{8}); m = f'(1,5) = -\frac{9}{8}$
PSF $\Rightarrow y = -\frac{9}{8}x - \frac{41}{16}$

I – 6.1 Methode *ATG*

Es gibt drei Problemtypen im Umkreis der Tangente. Welche? Wie werden sie jeweils gelöst? (mit GTR)

I – 6.1 Methode *ATG*

1. Tangente in $B(u|f(u))$ des Schaubilds:
im GTR direkt oder PSF: $y = f'(u)(x - u) + y_B$

2. Tangente mit gegebener Steigung m:
Gleichung: $f'(x) = m$ lösen $\Rightarrow x_i$. Dann wie 1.

3. Tangente von außen durch $P(a|b)$ – oft GTR:
ATG so(!) notieren: $y = f'(u)(x - u) + f(u)$
P einsetzen: $b = f'(u)(a - u) + f(u)$
$\Leftrightarrow b - f'(u)(a - u) = f(u)$
Bemerkung: im GTR sieht dies so aus:
$Y_1 = f(x); y_2 = nDerive(Y_1, X, X); y_3 = b - Y_2 * (a - X)$
Gleichung in u lösen (d.h. Schnitt $Y_1 \cap Y_3$). Dann wie 1.

I – 6.1 Beispiel *ATG*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 1$. Bestimmen Sie (mit GTR) jeweils die Gleichung der Tangente ...

1. ... im Punkt $B(4|f(4))$.
2. ... mit der Steigung 1,5.
3. ... die durch den Punkt $P(0|4)$ geht.

I – 6.1 Beispiel *ATG*

1. $y = 8x - 31$
2. $u_1 = -\frac{1}{3}; u_2 = 3$
$t_1 : y = 1,5x + 1,259$; $t_2 : y = 1,5x - 8$
3. $B(-1|-1,5)$; $y = 5,5x + 4$

I – 6.2 METHODE *Normale*

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Was versteht man unter einer *Normalen* und wie kann man sie bestimmen?

 10

I – 6.2 METHODE *Normale*

Eine Normale steht orthogonal zu einer Tangente, sie schneidet das Schaubild senkrecht im Berührpunkt $B(u|f(u))$ der zugehörigen Tangente mit dem Schaubild.
$m = -\frac{1}{f'(u)}$ PSF $\Rightarrow y = m(x-u) + y_B$

 10 - LÖSUNG

I – 6.2 BEISPIEL *Normale*

Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen des Graphen von f mit $f(x) = \frac{4}{x} + 2$ im Punkt $B(4|3)$.(33/5b)

 12

I – 6.2 BEISPIEL *Normale*

n: $y = 4(x-4) + 3 = 4x - 13$
Tangente t: $y = -0,25x + 4$

 12 - LÖSUNG

I – 8.1.1 BEISPIEL *Mini-Max (GTR)*

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = -(x-2)^2 + 2$.
Für welche Werte $x \in [0; 2]$ wird die Differenz der Funktionswerte minimal? (40/1)

 13

I – 8.1.1 BEISPIEL *Mini-Max (GTR)*

$d(x) = |f(x) - g(x)|$ mit GTR (Skizze!!!)
im GTR: $Y_1 = f(x); Y_2 = g(x); Y_3 = abs(Y_1 - Y_2)$
$\Rightarrow T(1|1)$; Lösung: für $x = 1$

 13 - LÖSUNG

I – 8.1.2 BEISPIEL *Mini-Max (GTR)*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x(3-x)^2$.
Für welche Stelle $x \in [0; 3]$ wird der Abstand zum Ursprung extremal?

 14

I – 8.1.2 BEISPIEL *Mini-Max (GTR)*

$d(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$ mit GTR (Skizze!!!)
$\Rightarrow H(1,01|8,06); T(2,629|2,727)$
Max bei $x = 1,01$; Min bei $x = 2,629$

im GTR: $\mathtt{Y_1} = \mathtt{f(x)}; \mathtt{Y_2} = \sqrt{}(\mathtt{X}^2 + \mathtt{Y}_1^2)$

 14 - LÖSUNG

I – 8.2.1 BEISPIEL *Flächen (GTR)*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4$.
Die Koordinatenachsen und ihre Parallelen durch den Punkt $P(u|f(u))$ legen ein Rechteck fest.
Für welches $u \in [0; 2]$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks am größten?

I – 8.2.1 BEISPIEL *Flächen (GTR)*

$A(u) = u \cdot f(u)$ mit GTR (Skizze!!!)
$\Rightarrow H(1,15|3,08)$; Lösung: für $u = 1,15$

I – 8.2.2 BEISPIEL *Flächen (GTR)*

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.
Die Punkte $A(u|f(u)), B(0|0)$ und $C(u|0)$ legen ein Dreieck fest.
Für welches $u \in [-3; 0]$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks am größten?

I – 8.2.2 BEISPIEL *Flächen (GTR)*

$A(u) = 0,5u \cdot f(u)$ mit GTR (Skizze!!!)

$\Rightarrow H(-1,5|2,5)$; Lösung: $u = -1,5$

Hinweis: da $u < 0$ und $f(u) < 0$ ist obiger Ansatz sinnvoll. Eigentlich müsste stehen:
$A(u) = 0,5 \cdot (-u) \cdot (-f(u)) = 0,5u \cdot f(u)$.

II – 1 Methode *Verkettung*

Beschreiben Sie, was man unter einer Verkettung von Funktionen versteht.

Was unterscheidet $f \circ g$ und $g \circ f$? Geben Sie ein Beispiel.

II – 1 Methode *Verkettung*

Die Hintereinanderausführung bei einer Funktionstermberechnung.
Etwa bei $f(x) = (2x-3)^4$ wird, wenn man $f(1)$ berechnen will, zuerst $g(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ und dann $f(g(1)) = f(-1) = (-1)^4 = 1$ berechnet.

Man muss also $f(g) = g^4$ nach $g(x) = 2x - 3$ berechnen: $f \circ g$: f nach g

g nach f wäre: zuerst „hoch 4“ und dann „`mal 2-3`“ also $g(f(x)) = 2x^4 - 3$

II – 1 Beispiel *Verkettung*

Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Nennen Sie die Funktionen u und v. Wie lautet die Funktion $g = v \circ u$?
(a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ und (b) $f(x) = sin(x^2)$

II – 1 Beispiel *Verkettung*

(a) $v(x) = x + 2; u(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = u(v(x)) = u(x+2) = \sqrt{x+2}$
$g(x) = v(u(x)) = v(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 2$

(b) $v(x) = x^2; u(x) = \sin x$
$f(x) = u(v(x)) = u(x^2) = \sin(x^2)$
$g(x) = v(u(x)) = v(\sin x) = (\sin x)^2$

II – 2 Methode *Kettenregel*

Wie lautet die Kettenregel für Ableitungen?

II – 2 Methode *Kettenregel*

innere Ableitung mal äußere Ableitung
$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

II – 2 Beispiel *Kettenregel*

Leiten Sie ab: (60/4ah)
(a) $f(x) = 0,25 \sin(2x + \pi)$
(b) $g(x) = \sqrt{7x^2 - 5}$.

II – 2 Beispiel *Kettenregel*

(a) $f'(x) = 0,25\cos(2x+\pi) \cdot 2 = 0,5\cos(2x+\pi)$
(b) $f'(x) = \dfrac{7x}{\sqrt{7x^2-5}}$

Regel: $f(x) = \sqrt{g(x))} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

II – 3 Methode *Produktregel*

Wie lautet die Produktregel für Ableitungen?

 3

II – 3 Methode *Produktregel*

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

© A.S. / Version 2 (August 2012) 3 - Lösung

II – 3 Beispiel *Produktregel*

Leiten Sie ab: (63/2ge)
(a) $f(x) = 3x \cdot \sin^2(x)$
(b) $f(x) = (5-4x)^3 \cdot x^{-2}$.

© A.S. / Version 2 (August 2012) 3

II – 3 Beispiel *Produktregel*

(a) $f'(x) = 3\sin x(\sin x + 2x\cos x)$
(b) $f'(x) = -\frac{(5-4x)^2}{x^3} \cdot (4x+10)$

© A.S. / Version 2 (August 2012) 3 - Lösung

II – 4.1 Methode *Quotientenregel*

Wie lautet die Quotientenregel für Ableitungen?

© A.S. / Version 2 (August 2012) 4

II – 4.1 Methode *Quotientenregel*

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

© A.S. / Version 2 (August 2012) 4 - Lösung

II – 4.1 Beispiel *Quotientenregel*

Leiten Sie ab: (65/3ad)
(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+4)^2}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{2x}$.

© A.S. / Version 2 (August 2012) 4

II – 4.1 Beispiel *Quotientenregel*

(a) $f'(x) = \frac{2x^2+6x-8}{(x+4)^3}$
(b) $f'(x) = \frac{7-4x}{4x^2 \cdot \sqrt{2x-3}}$

© A.S. / Version 2 (August 2012) 4 - Lösung

II – 4.2.1 Beispiel *keine QuotRegel!!*

Leiten Sie ab: (65/4ab)

(a) $f(x) = \dfrac{3}{5-2x}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^3}$

II – 4.2.1 Beispiel *keine QuotRegel!!*

(a) $f(x) = 3(5-2x)^{-1}$

$\Rightarrow\ f'(x) = -3(5-2x)^{-2}\cdot(-2) = \dfrac{6}{(5-2x)^2}$

(b) $f(x) = (x^2-1)^{-3}$

$\Rightarrow\ f'(x) = -3(x^2-1)^{-4}\cdot 2x = -\dfrac{6x}{(x^2-1)^4}$

II – 4.2.2 Beispiel *keine QuotRegel!!*

Leiten Sie ab: (65/4cd)

(a) $f(x) = \dfrac{x-3x^2}{x^3}$

(b) $f(x) = \dfrac{6x^2+x-3}{3x}$

II – 4.2.2 Beispiel *keine QuotRegel!!*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x} = x^{-2} - 3x^{-1}$

$\Rightarrow\ f'(x) = -2x^{-3} + 3x^{-2} = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3x-2}{x^3}$

(b) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{x} = 2x + \dfrac{1}{3} - x^{-1}$

$\Rightarrow\ f'(x) = 2 + x^{-2} = 2 + \dfrac{1}{x^2}$

II – 5.1 Beispiel *Exponentialfunktion*

Bilden Sie die erste Ableitung: (67/1j, 3f)

(a) $f(x) = -0,4e^{-5x}$

(b) $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$.

II – 5.1 Beispiel *Exponentialfunktion*

(a) $f'(x) = 2e^{-5x}$

(b) $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x - 1}{x^2}$

II – 5.2 Beispiel *Exponentialfunktion*

Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von $f(x) = x^2 \cdot e^{0,5x}$. (68/9d)

II – 5.2 Beispiel *Exponentialfunktion*

$T(0|0); H(-4|\frac{16}{e^2})$

$W_1(-1,17|...); W_2(-6,83|...)$

II – 6 METHODE *Logarithmus*

Erkläre die Funktion $f(x) = \ln x$.
(Definition von $\ln x$; Besonderheiten des Schaubilds)

II – 6 METHODE *Logarithmus*

$y = \ln x$ entsteht aus $y = e^x$ durch eine Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$

(Umkehrfunktion: Die „Blickrichtung" hat sich geändert. Normalerweise schaut man bei Funktionen vom x-Wert zum y-Wert; bei einer Umkehrfunktion aber vom y-Wert zum x-Wert.
Wenn man aber die übliche Blickrichtung beibehalten will, muss man eine Variablenumbenennung vornehmen: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$; führt zu: $y = \ln x$.)

II – 6 BEISPIEL *Logarithmus*

Löse die Gleichungen: (70/2g, 8gh)
(a) $2e^{3x+4} = \frac{2}{e}$
(b) $e^{2x-6} \cdot (5 - e^{3x}) = 0$
(c) $2e^x + 15 = 8e^{-x}$.

II – 6 BEISPIEL *Logarithmus*

(a) $x = -\frac{5}{3}$

(b) $x = \frac{1}{3} \ln 5$

(c) Subst: $u = e^x \Rightarrow\ 2u^2 + 15u - 8 = 0$
$\Rightarrow\ u_1 = 0,5; u_2 = -16$
$\Rightarrow\ x_1 = \ln(0,5); x_2 : k.L.$

II – 7.1 BEISPIEL *Funktionenschar*

Welchen Einfluss haben die Parameter
(a) in $f_t(x) = x^2 + tx$ und
(b) in $f(x) = sin(tx)$. (73/1ci)

II – 7.1 BEISPIEL *Funktionenschar*

(a) $f_t(x) = x(x + t)$. Alle Schaubilder sind nach oben geöffnete Normalparabeln und gehen durch den Ursprung und haben als weitere Nullstelle $N_2(-t|0)$.

(b) t bewirkt eine Streckung/Stauchung in x-Richtung: Periode $p = \frac{2\pi}{t}$

II – 7.2 BEISPIEL *Funktionenschar*

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit
$f_t(x) = e^{tx} - 4$.
(a) Welche Steigung hat f_t an der Stelle 0?
(b) Für welchen Wert von t ist diese Steigung 1?
(73/3b)

II – 7.2 BEISPIEL *Funktionenschar*

(a) $f_t'(0) = t$

(b) $f_t'(x) = 1 \Rightarrow\ t = 1$

III – 1 Methode *Größe aus f'*

Erkläre, wie man von (dem Schaubild) der Änderungsrate einer Größe auf den Bestand der Größe schließen kann.
Gib ein Beispiel dazu.

III – 1 Methode *Größe aus f'*

1. Man muss den Flächeninhalt zwischen Schaubild und x-Achse abschätzen.

2. Die FE beträgt das Produkt aus x-Achsen-Einheit und y-Achseneinheit.

3. Zum Abschätzen kann man Rechtecke (Ober-/Untersumme) oder Trapeze verwenden.

4. am besten: Trapezformel:
für jedes Trapez neu berechnen: r = rechter Rand; l = linker Rand
$A_i = m \cdot h = \frac{f(r)+f(l)}{2} \cdot \text{TrapezBreite}$

III – 1 Beispiel *Größe aus f'*

Bei einem Auto werden folgende Geschwindigkeiten gemessen.

t [s]	0	1	4	10	20	60
v [m/s]	2	2,5	3,5	6	9	10

Bestimmen Sie einen Schätzwert für die in diesem Zeitraum zurückgelegte Strecke.

III – 1 Beispiel *Größe aus f'*

$s = 494,75$ m (Trapezmethode)

III – 2 Methode *Integral*

Was ist die Grundidee beim Integral?
Wie kann ein Integral positiv bzw. negativ werden?

III – 2 Methode *Integral*

Grundidee: Summe von unendlich vielen Rechtecken (Ober- / Untersumme). Der Grenzwert dieses Rechteckflächen muss für die Ober- und Untersumme gleich sein.

Ein Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ wird dann positiv, wenn
1. $f(x) > 0$ im Intervall und
2. $a < b$ (übliche Integrationsrichtung)
oder beides umgekehrt, also $f(x) < 0$ und $a > b$

III – 2 Beispiel *Integral*

Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Integral positiv, negativ oder null ist: (94/7abd*e)

(a) $\int\limits_{10}^{80} x^2\,dx$ (b) $\int\limits_{10}^{11} -x^4\,dx$

(c*) $\int\limits_{3}^{-3} e^x\,dx$ (d) $\int\limits_{0}^{4\pi} \sin(x)\,dx$

III – 2 Beispiel *Integral*

(a) $\oplus$, da $f(x) > 0$ (übliche Integrationsrichtung)
(b) $\ominus$, da $f(x) < 0$ (übliche Integrationsrichtung)
(c*) $\ominus$, da $f(x) > 0$ (neg. Integrationsrichtung)
(d) 0, da sich die beiden Flächen gegenseitig aufheben (Integrationsrichtung egal)

III – 3 Methode *Hauptsatz*

Erläutere den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

III – 3 Methode *Hauptsatz*

Der Kern besteht darin, dass die Ableitung einer Flächeninhaltsfunktion $A_a(x)$ die Randfunktion $f(x)$ ergibt, kurz: mit $A_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Hauptsatz:$\Rightarrow$ $A'_a(x) = f(x)$,

d.h. A_a ist eine Stammfunktion von f!
Eine Folge davon ist, dass
$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

III – 3 Beispiel *Hauptsatz*

Berechne (ohne GTR) das Integral: (97/4b; 6d)

(a) $\int_2^4 x^2\,dx$

(b) $\int_{-4}^{-2} -0,5x\,dx$

(c) $\int_t^2 4x^3 - 3x^2\,dx$

III – 3 Beispiel *Hauptsatz*

(a) $18\frac{2}{3}$
(b) 3
(c) $t^3 - t^4 + 8$

III – 4.1 Beispiel *Stammfunktionen*

Bestimmen Sie eine Stammfunktion: (101/1h; 2d; 102/12c)

(a) $f(x) = \cos(4x - \pi)$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{3-4x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1+x+x^3}{3x^3}$

III – 4.1 Beispiel *Stammfunktionen*

(a) $F(x) = \sin(4x - \pi) \cdot 0,25$

(b) $f(x) = (3-4x)^{-1}$
$\Rightarrow\ F(x) = \ln(|3-4x|) \cdot \frac{1}{-4} = -0,25\ln(|3-4x|)$

(c) $f(x) = (2x-3)^{-3}$
$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{-2}(2x-3)^{-2} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4(2x-3)^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^{-3} + \dfrac{1}{3}x^{-2} + \dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{6x^2} - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3}x$

III – 4.2 Beispiel *Stammfunktionen*

Welche Stammfunktion von f mit $f(t) = 2e^{0,5t}$ hat an der Stelle 0 den Funktionswert 1? (102/13c)

III – 4.2 Beispiel *Stammfunktionen*

$F(t) = 4e^{0,5t} + c$
$F(0) = 4 + c = 1 \Rightarrow x = -3$

III – 5.1 Methode *Integralfunktion*

Was ist eine Integralfunktion I_a von einer Funktion f zu einer unteren Schranke a?

Wie geht man vor, wenn man eine Integralfunktion I_a zu einem gegebenen Schaubild G_f zu einer unteren Schranke a zeichnen soll?

III – 5.1 Methode *Integralfunktion*

Anschaulich: die Fläche zwischen dem Schaubild und der x-Achse ab der Stelle a: $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$

1. Spätere Hop/Tip als Senkrechte markieren
   $\hat{=}$ Nullstellen von f
2. Spätere Wep als Senkrechte markieren
   $\hat{=}$ Extrempunkte von f
3. $(a|0)$ als ein Punkt von I_a einzeichnen
   da $I_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$
4. Die Infos sinnvoll verbinden.

III – 5.1 Beispiel *Integralfunktion*

Die Funktion v mit $v(t) = -30(e^{-0,3t} - 1)$ beschreibt die Geschwindigkeit eines Autos (t in s, v(t) in m/s). (GTR)

(a) Wie weit fährt das Auto in $0 \leq t \leq 4$?

Wie lange benötigt das Auto für die Strecke von 60 m ...

(b) ... aus dem Stand;

(c) ... ab dem Zeitpunkt $t = 4$?

III – 5.1 Beispiel *Integralfunktion*

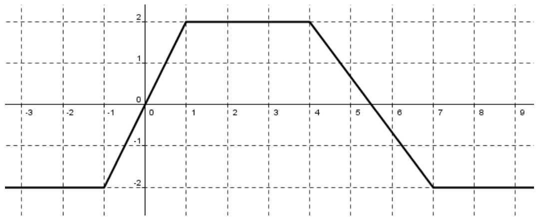
(a) $s = \int_0^4 v(t)\,dt = 50,119$ m

(b) $s(t) = \int\limits_0^t v(x)\,dx = 60 \Rightarrow \; t = 4,458$ s (GTR)

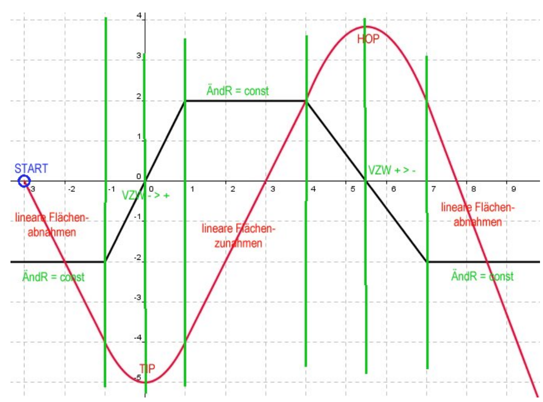
(c) $s(t) = \int\limits_4^t v(x)\,dx = 60 \Rightarrow \; t = 6,534$ s (GTR)

III – 5.2.1 Beispiel *grafische Aufleitung*

Skizzieren Sie die Integralfunktion zum Schaubild von f zur unteren Schranke $a = -3$.

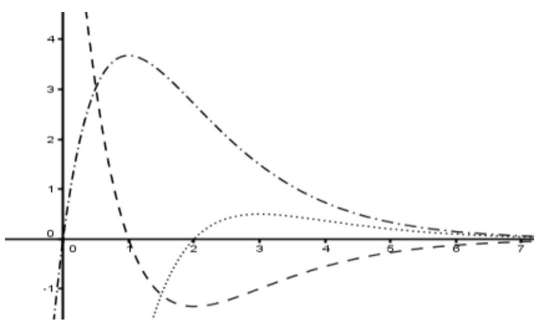


III – 5.2.1 Beispiel *grafische Aufleitung*

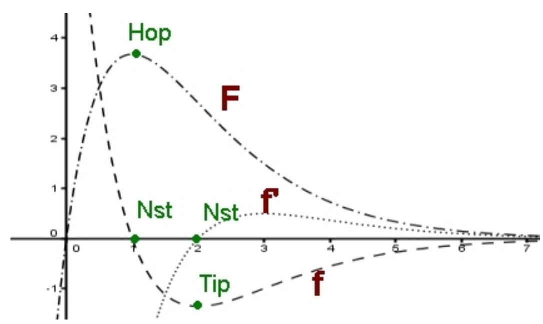


III – 5.2.2 Beispiel *grafische Aufleitung*

Gegeben sind f, f' und F. Ordnen Sie jeweils einen Graphen zu (mit Begründung). (106/11)



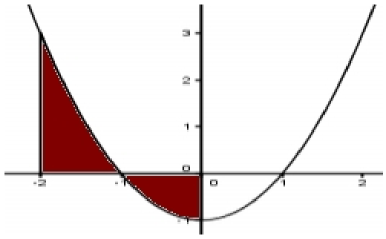
III – 5.2.2 Beispiel *grafische Aufleitung*



Hop von F = Nst von f mit VZW $\oplus \rightarrow \ominus$;
Tip von f = Nst von f' mit VZW $\ominus \rightarrow \oplus$

III – 6.1 Beispiel *Flächen*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$. Berechnen Sie die markierte Fläche: (109/1a)

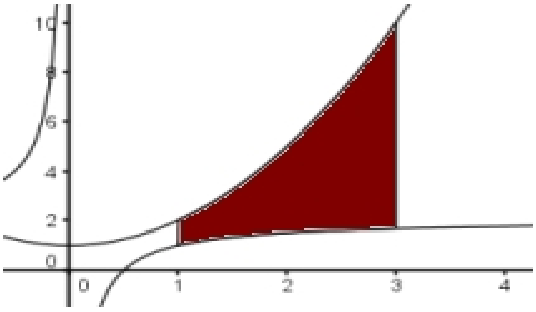


III – 6.1 Beispiel *Flächen*

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{0} = 2$$

III – 6.2 Beispiel *Flächen*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ und g mit $g(x) = -\frac{1}{x} + 2$. Berechnen Sie die markierte Fläche:



III – 6.2 Beispiel *Flächen*

$f(x) - g(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 1$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 + \ln x - x\right]_1^3 = 6\tfrac{2}{3} + \ln 3 \approx 7,765$$

III – 7 Methode *Unbegrenzte Flächen*

Gib ein Beispiel für eine unbegrenzte Fläche.

Wie kann man vorgehen, um diesen Flächeninhalt zu berechnen?

III – 7 Methode *Unbegrenzte Flächen*

z.B.: $f(x) = e^{-x}$;
die Fläche ab der Stelle $x = 0$ bis $+\infty$

1. $A(u) = \int\limits_0^u f(x)\,dx$ berechnen.
2. $\lim\limits_{u\to\infty} A(u)$ untersuchen, ob der Grenzwert existiert.

III – 7 Beispiel *Unbegrenzte Flächen*

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 2e^x$ schließt mit den Koordinatenachsen eine nach links nicht begrenzte Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt A hat. (112/3)

III – 7 Beispiel *Unbegrenzte Flächen*

1. $A(u) = \int\limits_u^0 2e^x\,dx = [2e^x]_u^0 = 2 - 2e^u$
2. $\lim\limits_{u\to-\infty} (2 - 2e^u) = 2$

III – 8 Methode *Mittelwert*

Was ist der Mittelwert einer Funktion und wie kann man ihn berechnen?

III – 8 Methode *Mittelwert*

Wenn eine Funktion f nicht konstant ist, dann schwankt sie in einem bestimmten Intervall $[a, b]$ um einen mittleren Funktionswert $\overline{f}$

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiel: $f(x) = \sin x + 50$ schwankt bei der Betrachtung großer Intervalle um 50. Wenn man bei f nur ein kleines Intervall um $0,5\pi$ betrachtet, ist der mittlere Funktionswert ungefähr 50+1=51, weil $\sin(0,5\pi) = 1$.

III – 8 Beispiel *Mittelwert*

Die Tageslänge beträgt in Madrid ungefähr $H(t) = 12 + 2,4\sin[0,0172(t-80)]$, (t in Tagen nach Jahresbeginn, $H(t)$ in Stunden). Bestimmen sie die durchschnittliche Tagesdauer im Juni? (114/9; GTR)

Hinweis: In der Mathematik hat jeder Monat 30 Tage, der 6. Monat Juni besteht dann aus den Tagen 150 bis 180.

Im Buch steht das anders; aber der 1. Monat bezieht sich doch auf das Intervall [0; 30] Tage ... ?!?

III – 8 Beispiel *Mittelwert*

$\overline{H} = 14,36$ h

III – 9.1 Methode *Volumenintegral*

Wie kann man das Volumen eines Rotationskörpers berechnen?

III – 9.1 Methode *Volumenintegral*

Bei Rotation eines Schaubilds im Intervall $[a, b]$ um die x-Achse gilt:

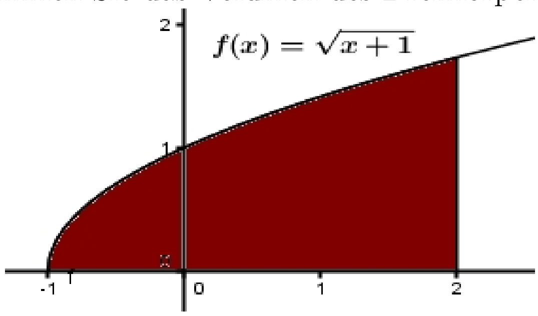
$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Vergleiche das Volumen eines winzig kleinen Zylinders...:

$V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi(f(x))^2 \cdot \Delta x$

III – 9.1 Beispiel *Volumenintegral*

Die gefärbte Fläche rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des Drehkörpers.

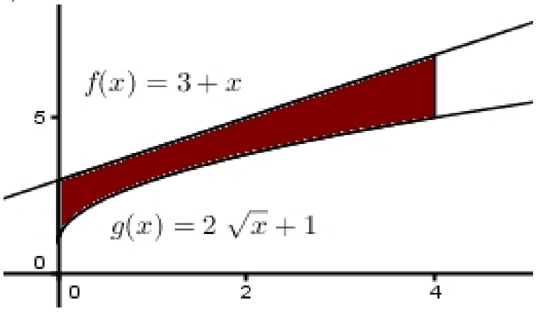


III – 9.1 Beispiel *Volumenintegral*

$V = 2,5\pi$

III – 9.2.1 Beispiel *Volumenintegral*

Die gefärbte Fläche rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des Drehkörpers. (GTR)



III – 9.2.1 Beispiel *Volumenintegral*

$$V = \pi \int_0^4 (3+x)^2 - (2\sqrt{x}+1)^2\,dx = 48\pi$$

III – 9.2.2 Beispiel *Volumenintegral*

Die Fläche unter dem Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ über $[1; z]$ rotiert um die x-Achse. Untersuchen Sie, ob der dabei entstehende Drehkörper für $z \to +\infty$ ein endliches Volumen hat. (117/11)

III – 9.2.2 Beispiel *Volumenintegral*

$$V(u) = \pi \int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left(1 - \frac{1}{u}\right)$$

$$\lim_{u \to +\infty} V(u) = \pi$$

IV – 1.1 Methode *Achsensymmetrie*

Wie kann man eine Achsensymmetrie eines Graphen nachweisen?
(zur y-Ache oder zu $x = a$)

IV – 1.1 Methode *Achsensymmetrie*

y-Achse: es muss für alle x gelten: $f(-x) = f(x)$
d.h. man setzt $-x$ in den Funktionsterm ein und muss solange umformen, bis man erkennt, dass $f(x)$ (nicht) herauskommt.

zu $x = a$: es muss für alle x gelten:
$f(a-u) = f(a+u)$
d.h. man setzt einmal $a-u$ und einmal $a+u$ in den Funktionsterm ein und stellt fest, ob beide Terme (un-)gleich sind.

IV – 1.1 Beispiel *Achsensymmetrie*

Überprüfen Sie das Schaubild der Funktion auf Symmetrie:

(a) $f(x) = -x^2 + x^6$; (133/1a)
(b) $f(x) = e^{x-1} + e^{1-x}$ (Vermutung mit dem GTR)

IV – 1.1 Beispiel *Achsensymmetrie*

(a) achsensym. zu y-Achse, da eine gerade Funktion
(= Polynom mit nur geradzahlige Hochzahlen)

(b) Vermutung $x = 1$ ist Symmetrieachse:

$$f(1+u) = f(1-u)$$
$$e^{(1+u)-1} + e^{1-(1+u)} = e^{(1-u)-1} + e^{1-(1-u)}$$
$$e^{u} + e^{-u} = e^{-u} + e^{u}$$

und dies stimmt für alle u

IV – 1.2 Methode *Punktsymmetrie*

Wie kann man eine Punktsymmetrie eines Graphen nachweisen (zum Ursprung oder zu $Z(a|b)$)?

IV – 1.2 Methode *Punktsymmetrie*

zum Ursprung: es muss für alle x gelten:
$f(-x) = -f(x)$
oder f ist eine ungerade Funktion, d.h. sie ist ein Polynom und enthält nur ungeradzahlige Hochzahlen.

zu $Z(a|b)$: Der Mittelwert von den Funktionswerten um $x = a$ ist b

$$\frac{f(a+u) + f(a-u)}{2} = b$$

IV – 1.2 Beispiel *Punktsymmetrie*

Überprüfen Sie das Schaubild der Funktion auf Symmetrie:

(a) $f(x) = 3x^3 + 2x$
(b) $f(x) = x^3 - 3x^2$. (Vermutung mit dem GTR; 159/2b)

IV – 1.2 Beispiel *Punktsymmetrie*

(a) ungerade Funktion, deshalb punktsymmetrisch zum Ursprung

(b) Vermutung $Z(1|-2)$: Es muss gelten:
$$\frac{f(1+u) + f(1-u)}{2} = -2$$
$$\Leftrightarrow f(1+u) + f(1-u) = -4$$
Wenn man die x-Werte $(1 \pm u)$ einsetzt und die Terme korrekt vereinfacht, kommt $-4 = -4$ heraus, also ist Z der Symmetriepunkt.

IV – 2 Methode *Polstellen*

Welche Arten von Polstellen gibt es und wie erkennt man sie im Funktionsterm?

IV – 2 Methode *Polstellen*

1. es gibt Pole mit / ohne VZW
2. entscheidend ist die Hochzahl bei der NennerNst
3. doppelte / vierfache / ... ⇒ Pol ohne VZW (z.B. $x^2; (x-3)^4 \ldots$)
4. einfache / dreifache / ... ⇒ Pol mit VZW (z.B. $x, (x-2), (x+3)^3 \ldots$)

Hinweis: $\frac{\heartsuit}{x^3 \pm 1}$ hat keine dreifache NennerNst, sondern nur eine einfache!

IV – 2 Beispiel *Polstellen*

Bestimme die Null- und Polstellen von:

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2(x-1)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x-5}{x(x+2)^2}$

IV – 2 Beispiel *Polstellen*

(a) $N(1|0)$; Pole: $x = 2; x = -2$ je mit VZW

(b) $N_1(3|0); N_2(-3|0)$;
Pole: $x = 0; x = 1$ je ohne VZW

(c) $N_1(5|0); N_2(-1|0)$;
Pole: $x = 0$ mit VZW; $x = -2$ ohne VZW

IV – 3 Methode *Verhalten $x \to \pm\infty$*

Welche Fälle kann man bei gebrochenrationalen Funktionen bezüglich des Verhaltens für $x \to \pm\infty$ unterscheiden? (Stichwort: Zählergrad, Nennergrad; gibt jeweils Beispiele von Funktionen.)

IV – 3 Methode *Verhalten $x \to \pm\infty$*

1. $\boxed{\text{Z=N}}$ ⇒ der Grenzwert existiert, z.B. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{6x^3+4}{3x^3-2x} = 2$ mit waager. Asymp. $y = 2$
2. $\boxed{\text{Z = N+1}}$ ⇒ kein Grenzwert, schräge Asymptote z.B. $f(x) = \frac{4x^3+3x^2+1}{4x^2-2x} \longrightarrow \pm\infty$; As: $y = x + 1,25$
3. $\boxed{\text{Z > N+1}}$ ⇒ der Grenzwert existiert nicht, z.B. $f(x) = \frac{2x^4+4}{3x^2-2x} \longrightarrow \pm\infty$
4. $\boxed{\text{Z<N}}$ ⇒ der Grenzwert ist 0, z.B. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2x^2+4}{3x^3-2x} = 0$ mit waager. Asymp. $y = 2$

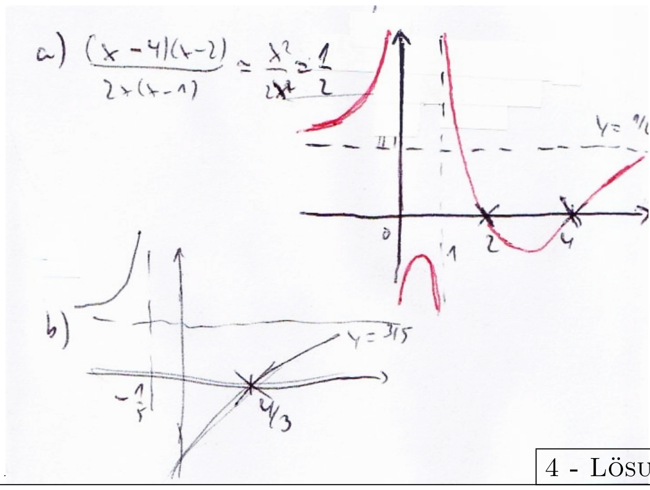
IV – 3 Beispiel *Verhalten $x \to \pm\infty$*

Untersuchen Sie die Funktionen auf Null- und Polstellen, sowie das Verhalten für große x. Skizzieren Sie mit diesen Informationen die Schaubilder.

(a) $f(x) = \dfrac{3x-4}{5x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+8}{2x(x-1)}$

IV – 3 Beispiel *Verhalten $x \to \pm\infty$*



IV – 4.1 Beispiel *Besondere Punkte*

Bestimmen Sie die Extremstellen von
$f(x) = e^{2x} - 2e^x - 12x$.
(142/3d)

IV – 4.1 Beispiel *Besondere Punkte*

notw. Bdg.: Lösen von $f'(x) = 0$ führt - nach einer Substitution - einmal zu $x_1 = \ln 3$ als möglicher Extremstelle und zu k.L. für die zweite u-Lösung

die hinr. Bedingung bestätigt die Tip-Stelle x_1

IV – 4.2 Beispiel *Besondere Punkte*

Bestimmen Sie die Wendestellen von
$f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^x$.
(142/4a)

IV – 4.2 Beispiel *Besondere Punkte*

notw. Bdg.: Lösen von $f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 4x) = 0$ führt zu den beiden möglichen Wep-Stellen
$x_1 = 0$ und $x_2 = -4$

die hinr. Bedingung $f'''(x_{1/2}) \neq 0$ bestätigt beide Wep-Stellen.

IV – 5.1 Beispiel *Funktionsanalyse*

Welche Eigenschaften der Funktion lassen sich ohne GTR erkennen (146/3a):

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 4x} \text{ und } g(x) = 10x \cdot e^{-x^2}$$

IV – 5.1 Beispiel *Funktionsanalyse*

f: x zunächst herauskürzen: $f(x) = \frac{4x}{x-4}$
(spätestens bei gleicher Null- und Polstelle muss man dies bemerken!!!)
dann: $N(0|0)$ einfach; Pol: $x = 4$; waagerechte Asymptote $y = 4$; $\mathbb{D} : x \neq 0; x \neq 4$
wegen $\mathbb{D}$ nur: „fast" punktsym. zu $(4|4)$;

g: Asymptote $y = 0$; $N(0|0)$ einfach; punktsym. zum Ursprung

IV – 5.2 Beispiel *Funktionsanalyse*

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$ auf Monotonie und Extremstellen.
(ohne GTR; 146/5b)

IV – 5.2 Beispiel *Funktionsanalyse*

$f'(x) = e^x(x - 1)$; man kann $x = 1$ als Tipstelle bestimmen

Monotonie:
für $x > 1$ ist f monoton wachsend, da $f'(x) > 0$
für $x < 1$ ist f monoton fallend, da $f'(x) < 0$

IV – 6 Methode *Funktionsschar*

Was versteht man unter der Ortslinie einer Punkteschar und wie kann man sie bestimmen?

IV – 6 Methode *Funktionsschar*

Besondere Punkte $P_t(x(t)|y(t))$ einer Funktionsschar (z.B. Extrema oder Wendepunkte) können auf einer besonderen Linie im Koordinatensystem liegen. Diese Linie wird als Ortslinie der Punkte bezeichnet.

Beispiel: $P_t(t^2+1|2t-4)$ (mit GeoGebra zeigen)
1. die t-Gleichung $x_P = x(t)$ nach t auflösen:
$x = t^2+1 \Rightarrow t = \pm\sqrt{x-1}$
2. diese(n) t-Wert in die t-Gleichung $y_P = y(t)$ einsetzen: $y = 2t-4 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x-1}-4$ (in diesem Beispiel entstehen zwei Ortslinie)

IV – 6 Beispiel *Funktionsschar*

Bestimmen Sie die Ortslinie der Extrempunkte der Funktionenschar $f_k(x) = x - k\cdot e^x; k \in \mathcal{R}^+$. (150/10c)

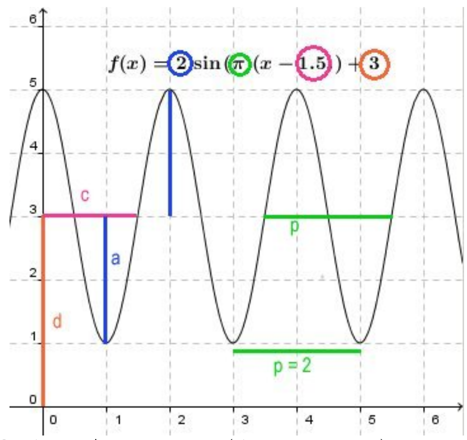
IV – 6 Beispiel *Funktionsschar*

1. $f'(x) = 1 - k\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x_H = \ln\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k$
2. $y_H = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - k\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - k\cdot\frac{1}{k}$;
$\Rightarrow H(-\ln k|\ln\left(\frac{1}{k}\right)-1)$
3. $x_H = -\ln k \Rightarrow -x = \ln k \Rightarrow k = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
4. $y_H = -\ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right) - 1 = -\ln(e^{-x}) - 1 = x - 1$
5. $\Rightarrow y = x - 1$ Ortslinie

IV – 7 Methode *Trigonometrie*

Erläutern Sie den Einfluss der Parameter bei $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$.

IV – 7 Methode *Trigonometrie*



1. a = Amplitude
2. b: legt die Periode fest: $p = \frac{2\pi}{b}$
3. c = x-Verschiebung
4. d = y-Verschiebung

IV – 7 Beispiel *Trigonometrie*

Skizzieren Sie - ohne GTR - das Schaubild von $f(x) = -2\sin(\pi(x-4)) - 3$

IV – 7 Beispiel *Trigonometrie*

Kontrolle: GTR

IV – 8 Methode *Funktionsanpassung*

Wie geht man vor, wenn man aus einer Punkt-Liste (Wertetabelle) mit dem GTR eine Näherungskurve bestimmen will?

 7

IV – 8 Methode *Funktionsanpassung*

1. Eingabe Wertetabelle in zwei GTR – Listen.
2. die Punkteschar im Grafikbildschirm anschauen: im GTR: `StatPlot ...`
3. Art der Näherungskurve bestimmen (linear, quadratisch, kubisch, trigonometrisch etc.)
4. entsprechende Regression auswählen und Ergebnis als Funktion speichern / notieren.
5. Kontrolle von Punkteschar und Näherungskurve im Bildschirm.

 7 - Lösung

IV – 8 Beispiel *Funktionsanpassung*

Bestimmen sie aus den Punkten eine passende Näherungskurve.

A = (-0.26, 0.62)
B = (-0.08, 1.36)
C = (0.32, 2.41)
D = (1.26, 2.37)
E = (1.68, 1.63)
F = (2.16, 0.55)
G = (4.66, 1.07)
H = (3.14, -1.34)
I = (3.96, -1.26)
J = (4.3, -0.45)

 11

IV – 8 Beispiel *Funktionsanpassung*

mit CubicReg ergibt sich:
$f(x) = 0,4x^3 - 2,58x^2 + 3,2x + 1,6$

 11 - Lösung

IV – WT Methode *Schiefe Asymptote*

Was versteht man unter einer schiefen Asymptote? (Beispiel)

 8

IV – WT Methode *Schiefe Asymptote*

Eine schiefe Asymptote ist eine lineare Näherungsfunktion mit einer Steigung $m \neq 0$.

Sie kann bei gebrochenrationalen Funktionen entstehen, falls der Zählergrad = Nennergrad +1, z.B: $f(x) = \frac{3x^2+5x+1}{x} = 3x + 5 + \frac{1}{x}$.
$y = 3x + 5$ ist die schräge Asymptote.

oder z.B. durch eine Addition einer linearen Funktion zu einer Exponentialfunktion:
Beispiel: $f(x) = e^x + 0,5x - 3$
$y = 0,5x - 3$ ist die schräge Asymptote.

 8 - Lösung

IV – WT Beispiel *Schiefe Asymptote*

Geben Sie eine gebrochenrationale Funktion an, deren Graph die Asymptoten $y = x + 4$ und $x = -6$ hat. (161/4f)

 12

IV – WT Beispiel *Schiefe Asymptote*

z.B. das einfachste Beispiel: $y = x + 4 + \dfrac{1}{x+6}$

 12 - Lösung

V – 1 Methode *Folgen*

Was ist eine explizite bzw. rekursive Beschreibung einer Folge? Gib ein Beispiel.

V – 1 Methode *Folgen*

explizit: Man kann den Funktions-/ Folgenwert direkt berechnen, ohne Vorgängerwerte zu kennen, z.B. $a_n = a(n) = 2n + 5$

rekursiv: Man berechnet Folgewerte mit Hilfe von Vorgängerfolgewerte, z.B.
Startwert: $a_0 = 5$
Rekursionsvorschrift: $a_n = a_{n-1} + 2$ gilt für $n \geq 1$.
Folge $(a_n) : 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$

V – 1 Beispiel *Folgen*

Bestimmen Sie eine rekursive und eine explizite Darstellung der Folge:
`-1, 0, 3, 8, 15, 24, 36,...` (174/4d)

V – 1 Beispiel *Folgen*

1. die erste Differenzenfolge lautet:
$\Delta^1(a_n) : 1, 3, 5, 7, \ldots$ also nicht konstant, also keine lineare Folge.
2. die zweite Differenzenfolge lautet:
$\Delta^2(a_n) : 2, 2, 2, 2 \ldots$, also konstant, also ist die Folge eine quadratische Folge
3. Ein scharfer Blick kann zeigen:
$a_1 = -1$
$a_n = a_{n-1} + (2n - 3) \quad n \geq 2$

V – 2 Methode *Folgen-Eigenschaften*

Wie kann man die Monotonie einer Folge nachweisen?

V – 2 Methode *Folgen-Eigenschaften*

für monoton wachsend zu zeigen:
$f(n+1) - f(n) \geq 0$
oder $\Leftrightarrow f(n+1) \geq f(n)$
oder (falls alle $f(n) > 0$) : $\frac{f(n+1)}{f(n)} \geq 1$.

Bemerkung: bei Funktionen mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ bildet man natürlich die Ableitung und löst eine entsprechende Ungleichung. Diese kann man aber bei Folgen mit $\mathbb{D} = \mathbb{N}$ nicht bilden!

V – 2 Beispiel *Folgen-Eigenschaften*

Untersuchen Sie die Folge $a_n = \dfrac{2n}{2n-3}$ auf Monotonie. (176/2b)

V – 2 Beispiel *Folgen-Eigenschaften*

Behauptung: (a_n) monoton fallend;
z.z. $a_{n+1} < a_n$
$\Leftrightarrow \dfrac{2(n+1)}{2(n+1)-3} < \dfrac{2n}{2n-3}$
$\Leftrightarrow 2(n+2)(2n-3) < 2n(2n-1)$
$\Leftrightarrow -6 < 0$ (wahr) für alle n
$\Rightarrow (a_n)$ monoton fallend

V – 3 METHODE *Grenzwert von Folgen*

Was ist die Idee bei der Definition eines Grenzwertes einer Folge? (Skizze! Stichwort: Schlauch ...)

 3

V – 3 METHODE *Grenzwert von Folgen*

anschaulich: eine Folge (a_n) hat den Grenzwert g, wenn für jede beliebige „Dünne“ eines Schlauches um den Grenzwert alle Folgeglieder sich ab einer bestimmten Stelle n_0 im Schlauch befinden.

in der mathematischen Formelsprache:
(a_n) hat den Grenzwert g
$\Leftrightarrow$ für jede beliebig kleine Zahl ϵ gibt es eine Zahl n_0 (die natürlich von ϵ abhängt), so dass für alle $n > n_0$ gilt: $|a_n - g| < \epsilon$.

 3 - LÖSUNG

V – 3 BEISPIEL *Grenzwert von Folgen*

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge
$a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ mit Hilfe der Grenzwertsätze.
(180/2b)

 3

V – 3 BEISPIEL *Grenzwert von Folgen*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\pm\infty} \left(2+\tfrac{1}{n}\right) = 2$$

 3 - LÖSUNG

V – 4 METHODE *expo. Wachstum*

Wie kann man eine (Zahlen-)Folge auf exponentielles Wachstum untersuchen?

 4

V – 4 METHODE *expo. Wachstum*

Man muss die Quotienten aufeinanderfolgender y-Werte bilden. Wenn diese ungefähr gleich sind, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

Bemerkungen:
1. dies setzt voraus, dass die Abstände der x-Werte gleich sind
2. bei linearem Wachstum bildet man Differenzen; bei quadratischem Differenzen von Differenzen etc.

 4 - LÖSUNG

V – 4 BEISPIEL *expo. Wachstum*

Untersuchen Sie die Folge auf exponentielles Wachstum: (183/1-III)

n	0	1	2	3	4	5	6
B(n)	85	66	51	40	30	24	19

 4

V – 4 BEISPIEL *expo. Wachstum*

Die Folge der Quotienten lautet:
$\dfrac{66}{85} = 0,776; \dfrac{51}{66} = 0,773; 0,784; 0,75; 0,8; 0,79$

d.h. sie sind ungefähr gleich groß
d.h. für den Wachstumsfaktor b gilt: $b \approx 0,78$
und die Bestandsfunktion lautet:
$B(n) = 85 \cdot 0,78^x$

 4 - LÖSUNG

V – 5 Methode *beschränktes Wachstum*

Durch welche geometrische Veränderungen erhält man das Schaubild des beschränkten Wachstums aus einem exponentiellen Wachstum? Was bedeutet dies algebraisch für den Funktionsterm?

V – 5 Methode *beschränktes Wachstum*

Beispiel: Erwärmung eines Objekts auf Zimmertemperatur.
Die monoton fallende Exponentialfunktion $f(x) = e^{-kx}$ $(k > 0)$ wird ...
1. mit einem Faktor $a > 0$ in y-Richtung gestreckt: $f(x) = a \cdot e^{-kx}$
2. an der x-Achse nach unten gespiegelt: $f(x) = -a \cdot e^{-kx}$
3. und zum Schluss in y-Richtung verschoben $f(x) = S - a \cdot e^{-kx}$

V – 5 Beispiel *beschränktes Wachstum*

Zeichnen Sie für verschiedene $k > 0$ jeweils den Graphen der Funktion f mit $f_k(x) = 10 - 6e^{-kx}$.

Beschreiben Sie die Abhängigkeit von dem Parameter k. (188/9)

V – 5 Beispiel *beschränktes Wachstum*

GTR!
je größer k, desto steiler ist das Schaubild. Gut erkennbar im Punkt $A(0|4)$ mit der Steigung $m = f'(0) = 6k \cdot e^{k \cdot 0} = 6k$.

V – 6.1 Methode *DGL–expo.*

(a) Wie lautet die DGL des exponentiellen Wachstums?

(b) Was bedeutet diese anschaulich (für ein Schaubild; prozentuale Änderung)?

(c) Wie lautet der Zusammenhang DGL & Funktionsterm?

V – 6.1 Methode *DGL–expo.*

(a) $y' = k \cdot y$, d.h. die Änderungsrate $f'(x)$ ist proportional zum Bestand $f(x)$

(b) Es handelt sich um eine Exponentialfunktion (steigend oder fallend).
Die Änderungsrate ist $100k\%$, z.B. für $k = -0,07$ ist dies eine Abnahme um 7%.

(c) $f'(x) = k \cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = a \cdot e^{kx}$ mit einer frei wählbaren Randbedingung, etwa $a = f(0)$.

V – 6.1 Beispiel *DGL–expo.*

(a) Geben Sie zu der Funktion f eine DGL an: $f(x) = 500e^{-0,1x}$. (191/3b)

(b) Geben Sie die Lösung der DGL an für: $y' = -0,2y$ und $f(0) = 10$. (191/4b)

V – 6.1 Beispiel *DGL–expo.*

(a) $f'(x) = -0,1f(x)$ und $f(0) = 500$;
Abnahme um 10% je Zeiteinheit.

(b) $f(x) = a \cdot e^{-0,2x}$
$f(0) = a \cdot 1 = 10 \quad \Rightarrow a = 10$
$\Rightarrow f(x) = 10e^{-0,2x}$

V – 6.2 Methode *DGL–beschr.*

(a) Wie lautet die DGL des beschränkten Wachstums?

(b) Was bedeutet diese anschaulich für ein Schaubild?

(c) Wie lautet der Zusammenhang DGL & Funktionsterm?

 7

V – 6.2 Methode *DGL–beschr.*

(a) $y' = k \cdot (S - y)$, d.h. die Änderungsrate $f'(x)$ ist proportional zum Sättigungsmanko $S - f(x)$ mit einer oberen Schranke S.

(b) Es handelt sich um eine verschobene Exponentialfunktion (steigend oder fallend).

(c) $f'(x) = k \cdot (S - f(x)) \Leftrightarrow f(x) = S + a \cdot e^{-kx}$ mit einer frei wählbaren Randbedingung, etwa $f(0) = S + a \Leftrightarrow a = f(0) - S$.

 7 - Lösung

V – 6.2 Beispiel *DGL–beschr.*

(a) Geben Sie zu der Funktion f eine DGL an: $f(x) = 100 - 30e^{-0,1x}$. (191/3d)

(b) Geben Sie die Lösung der DGL an für: $y' = 0,1(5 - y)$ und $f(0) = 10$. (191/4d)

 7

V – 6.2 Beispiel *DGL–beschr.*

(a) $f'(x) = 0,1(100 - f(x))$ und $f(0) = 70$

(b) $f(x) = 5 + a \cdot e^{-0,1x}$

$f(0) = 5 + a \cdot 1 = 10 \quad \Rightarrow a = 5$

$\Rightarrow f(x) = 5 + 5e^{-0,1x}$

 7 - Lösung

V – 7 Methode *DGL–logist.*

(a) Wie lautet die DGL des logistischen Wachstums?

(b) Wie lautet der Zusammenhang DGL & Funktionsterm?

 8

V – 7 Methode *DGL–logist.*

(a) $y' = k \cdot y \cdot (S - y)$, d.h. die Änderungsrate $f'(x)$ ist proportional zum Produkt aus dem aktuellen Bestand $f(x)$ und dem Sättigungsmanko $(S - f(x))$.

(b) $f'(x) = c \cdot f(x) \cdot (S - f(x))$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{S}{1 + a \cdot e^{-kx}}$ und $k = cS$

mit einer frei wählbaren Randbedingung, etwa

$f(0) = \dfrac{S}{1 + a} \Leftrightarrow a = \dfrac{S}{f(0)} - 1.$

 8 - Lösung

V – 7 Beispiel *DGL–logist.*

(a) Geben Sie zu der Funktion f eine DGL an: $f(x) = \dfrac{10}{1 + 4e^{-0,5x}}$.

(b) Geben Sie die Lösung der DGL an für: $y' = 0,015y(5 - y)$ und $f(0) = 10$.

 8

V – 7 Beispiel *DGL–logist.*

(a) $f'(x) = c \cdot f(x) \cdot (10 - f(x))$

mit $c = \dfrac{0,5}{10}$

$\Rightarrow f'(x) = 0,05 \cdot f(x) \cdot (10 - f(x))$

(b) $k = 0,015 \cdot 5 = 0,075 \quad \Rightarrow f(x) = \dfrac{5}{1 + ae^{0,075x}}$

mit $a = \frac{5}{10} - 1 = -0,5$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{5}{1 - 0,5e^{0,075x}}$.

 8 - Lösung

VI – 1 METHODE *Gauss-Verfahren*

Mit welchen Verfahren kann man ein Gleichungssystem lösen?
Wie funktioniert das *Gauss-Verfahren* zur Lösung eines LGS?

VI – 1 METHODE *Gauss-Verfahren*

allgemein: Einsetzungsverfahren d.h. eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst und in die anderen Gleichungen eingesetzt. Dadurch erhält man ein GS das 1 Gleichung weniger, aber auch 1 Variable weniger enthält.
Dieses reduzierte GS löst man weiter nach dem Einsetzungsverfahren ...

Das Gauss-Verfahren für LGS verwendet nur die Addition von 2 Gleichungen und Multiplikation von 1 Gleichung um ein reduziertes LGS zu erhalten.
Im GTR: Befehl `rref([A])` mit der Matrix [A].

VI – 1 BEISPIEL *Gauss-Verfahren*

Lösen Sie das LGS (214/3b; mit/ohne GTR):
$2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1$
$2x_2 + 3x_3 = 1$
$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

Interpretieren Sie das LGS und die Lösung geometrisch.

VI – 1 BEISPIEL *Gauss-Verfahren*

$x_1 = 1,25; x_2 = 0,5; x_3 = 0$
Geometrisch bedeutet das LGS den Schnitt dreier Ebenen im dreidimensionalen Raum. Als Schnittgebilde ergibt sich ein Punkt.

VI – 2 METHODE *LGS–Lösungsvielfalt*

(a) Was versteht man unter einem *über- / unterbestimmten* LGS?

(b) Was kann man *i.d.R.* über die Lösungsmengen solcher LGS aussagen?

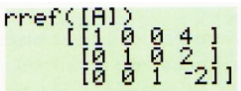
(c) Ist die Einschränkung *„i.d.R.“* (in b) nötig ?!?

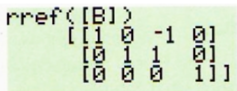
VI – 2 METHODE *LGS–Lösungsvielfalt*

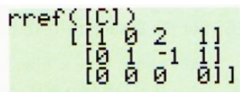
(a,b) Wenn ein GS mehr Gleichungen als Variablen hat, nennt man dies ein *überbestimmtes GS*. Da für eine eindeutige Lösung die Anzahl der Variablen mit der der Gleichungen übereinstimmen muss, ist es i.d.R. unwahrscheinlich, dass sich die überzähligen Gleichungen durch Einsetzen der Lösungen erfüllen werden.
Ein *unterbestimmtes GS* ergibt i.d.R. unendlich viele Lösungen – oder k.L. (vgl. c)
(c) Man kann stets zwei Gleichungen erstellen, die sich widersprechen, etwa $x_1 = 1$ und $x_1 = 2$. Egal wie viele Gleichungen mit irgendwelchen Variablen man zu diesen beiden Gleichungen dazu gesellt: das System der Gleichungen wird stets unlösbar bleiben!

VI – 2 BEISPIEL *LGS–Lösungsvielfalt*

Geben Sie die konkrete Lösungen des zur der GTR-Anzeige gehörenden rref-Ergebnisses eines LGS an: (217/2)

a) 

b) 

c) 

Welche anschaulichen Bedeutungen haben jeweils die Lösungsmengen?

VI – 2 BEISPIEL *LGS–Lösungsvielfalt*

Anschaulich handelt es sich um den Schnitt dreier Ebenen, der mit einem LGS gelöst wird:

(a) $x_1 = 4; x_2 = 2; x_3 = -2;$ Punkt $P(4|2|-2)$

(b) k.L

(c) $x_1 = 1 - 2x_3;\quad x_2 = 1 + x_3;\quad x_3 = bel.$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

VI – 3.1 Methode *Funktionsbestimmung*

Wie muss man vorgehen, wenn man aus Angaben über Extrem-, Wendepunkte, Nullstellen und weiteren Punkten eine Funktionsgleichung bestimmen soll?

VI – 3.1 Methode *Funktionsbestimmung*

Beispiel: Polynom dritten Grades
1. Funktionsansatz festlegen: z.B.
   allgemeiner Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
   oder Nullstellenform $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$
   oder Mischform $f(x) = (x-c)^2(ax+b)$; H/T$(c|0)$.
2. Anzahl der Parameter = Anzahl der Gleichungen
   sonst erhält man eine Funktionsschar.
3. Aufstellen der Gleichungen:
   Nullstellen/einfache Punkte =1 Gleichung;
   Extrema / Wendepunkte = 2 Gleichungen.
4. Lösen des GS (meist LGS).

VI – 3.1 Beispiel *Funktionsbestimmung*

(a) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, deren Graph den Wendepunkt $W(0|0)$ mit der x-Achse als Wendetangente und den Tiefpunkt $T(-1|-2)$ hat. (221/11a)

(b) Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen zweiten Grades, deren Graphen durch die Punkte $A(-4|0)$ und $B(0|-4)$ gehen. (220/3c)

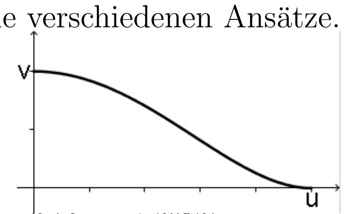
VI – 3.1 Beispiel *Funktionsbestimmung*

(a) Ansatz $f(x) = x^3(ax+b)$
mit dem TIP führt zu $a = 6; b = 8$

(b) Ansatz $f(x) = ax^2 + bx - 4$
und dem Punkt A führt zu $b = 4a - 1$
also der Funktionsschar
$f_a(x) = ax^2 + (4a-1)x - 4$.

VI – 3.2 Methode *Funktionsbestimmung*

Zusatz: Um einen passenden Funktionsterm zu finden eignet sich z.B.:
(a) ein Polynom 3. [oder 4.] Grades
(b) eine trigonometrische Funktion
oder (c) eine gebrochenrationale oder eine logistische Funktion (mit Einschränkungen)
Erläutere die verschiedenen Ansätze.



VI – 3.2 Methode *Funktionsbestimmung*

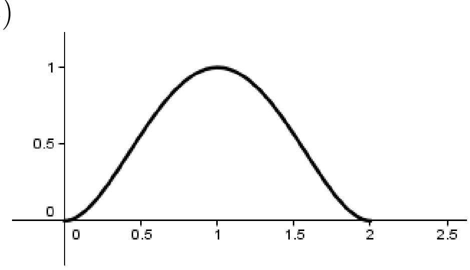
(a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
mit $T(u|0); H(0|v) \mathrel{\hat{=}} 4$ Gleichungen
$f(x) = a(x-u)^2(x+u)^2$ mit $f(0) = v \mathrel{\hat{=}} 1$ Gleichung
$f(x) = (ax+b)(x-u)^2$ mit $H(0|v) \mathrel{\hat{=}} 2$ Gleichungen

(b) $f(x) = \frac{v}{2}\cos(bx) + \frac{v}{2}$ und $p = \frac{2\pi}{b} = 2u$

(c) Näherungslösungen: gebrochenrationaler Ansatz:
$f(x) = \dfrac{b}{x^4 + c}$ mit $f(u) = 0,001$ und $f(0) = v$ bzw.
logistische Ansatz $f(x) = \dfrac{v}{1 + ae^{kx}}$ mit $f(0) = v - 0,001$
und $f(u) = 0,001$ oder andere Funktionstypen

VI – 3.2 Beispiel *Funktionsbestimmung*

Folgendes Schaubild kann mit verschiedenen Funktionstypen angenähert werden.
Gib eine Lösung an.
Kennst du noch eine weitere Möglichkeit? (Zusatz)



VI – 3.2 Beispiel *Funktionsbestimmung*

(a) $f(x) = -0,5\cos(\pi x) + 0,5$

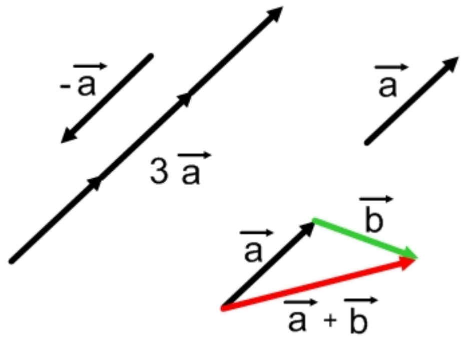
(b) $f(x) = a(x-2)^2x^2$ mit $f(1) = 1 \quad \Rightarrow a = 1$

(c) Näherungslösung: $f(x) = \dfrac{1}{e^{3(x-1)^2}} = e^{-3(x-1)^2}$

VII – 1 Methode *Wdh. Vektoren*

Veranschaulichen Sie die Addition und Multiplikation von Vektoren mit einer Skizze.

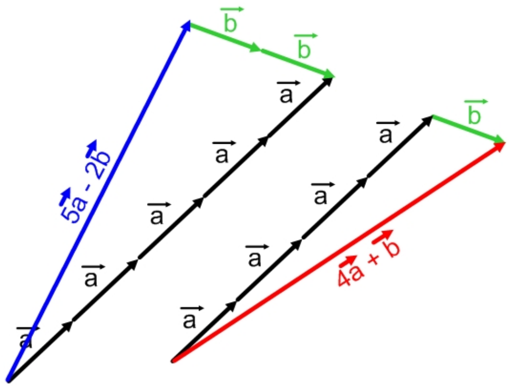
VII – 1 Methode *Wdh. Vektoren*



VII – 1 Beispiel *Wdh. Vektoren*

Veranschauliche mit zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgenden Vektor (239/1ac)
(a) $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$ und (b) $\vec{d} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$

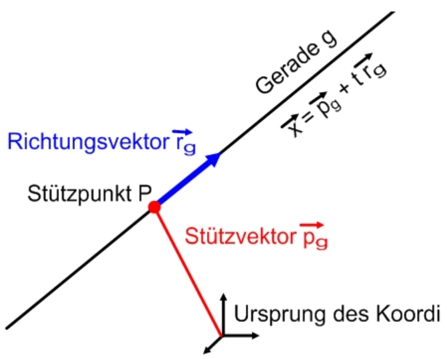
VII – 1 Beispiel *Wdh. Vektoren*



VII – 2 Methode *Geraden*

Was bedeuten in der Geradengleichung $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{r}$ die einzelnen Bestandteile?

VII – 2 Methode *Geraden*



VII – 2 Beispiel *Geraden*

Untersuchen Sie die beiden Geraden auf einen Schnittpunkt: (241/1c)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$

VII – 2 Beispiel *Geraden*

Das zugehörige LGS führt zu einem Widerspruch, also gibt es keinen Schnittpunkt:

$$\begin{bmatrix} -2 & -11 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

also ein Widerspruch in der letzten Zeile

VII – 3 Methode *Längen von Vektoren*

Was ist ein Einheitsvektor?
Wie kann man einen Vektor auf eine bestimmte Länge verkürzen/verlängern?

VII – 3 Methode *Längen von Vektoren*

Ein Einheitsvektor $\overrightarrow{v_0}$ ist ein Vektor mit der Länge 1.
Man muss seine Länge bestimmen
$l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und anschließend durch diese Länge l teilen.

VII – 3 Beispiel *Längen von Vektoren*

Bestimmen Sie für $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Länge und den zugehörigen Einheitsvektor. (244/1b)
Wie lautet der zugehörige Vektor mit der Länge 10?

VII – 3 Beispiel *Längen von Vektoren*

$l = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \Rightarrow \ \overrightarrow{v_0} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v'} = \frac{10}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

VII – 5.1 Methode *Skalarprodukt*

Wie kann man – unter Verwendung des Skalarprodukts – nachweisen, dass ein Parallelogramm ABCD sogar ein Rechteck [eine Raute] ist?

VII – 5.1 Methode *Skalarprodukt*

Für ein Parallelogramm ABCD muss gelten:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oder $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Falls zusätzlich noch gilt:
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, ist das Parallelogramm sogar ein Rechteck.

Falls zusätzlich noch gilt:
$\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ist das Parallelogramm sogar eine Raute.

VII – 5.1 Beispiel *Skalarprodukt*

Geben Sie die Gleichung einer Geraden h an, die die Gerade g orthogonal schneidet.
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
(252/3b)

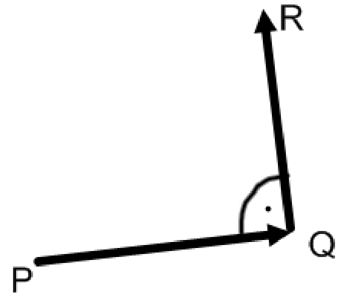
VII – 5.1 Beispiel *Skalarprodukt*

Der Stützpunkt wird übernommen. Gesucht ist also nur ein Vektor, der zu $\overrightarrow{r_g}$ orthogonal ist, z.B.:
$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder ...
also h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

VII – 5.2.1 BEISPIEL *Skalarprodukt*

Zeichnen Sie eine Figur, so dass gilt:
$\vec{PQ} \cdot \vec{QR} = 0$. (252/6a)

VII – 5.2.1 BEISPIEL *Skalarprodukt*



VII – 5.2.2 BEISPIEL *Skalarprodukt*

Bestimmen Sie alle(!) Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ orthogonal sind. (252/8b)

VII – 5.2.2 BEISPIEL *Skalarprodukt*

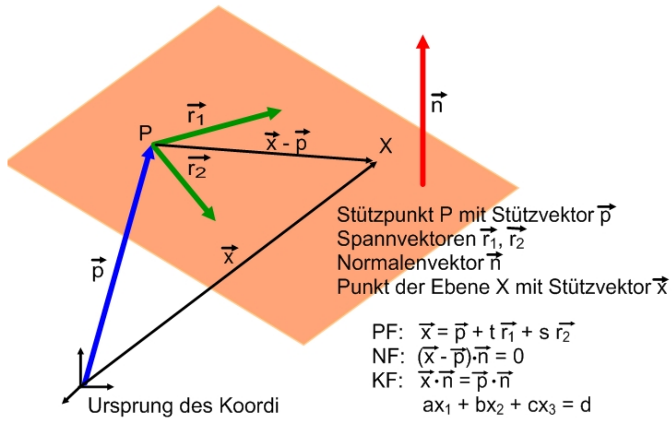
Mit dem Kreuzprodukt berechnet man den orthogonalen Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -17 \end{pmatrix}$

alle Vektoren sind dann alle Vielfache von $\vec{n}$, also $\vec{n_t} = t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -17 \end{pmatrix}$

VII – 6 METHODE *Ebenen*

Eine Ebene kann man in der Parameter-, der Normalen- oder der Koordinatenform angeben. Wie lauten diese und – wenn möglich – welche anschauliche Bedeutung haben die einzelnen Bestandteile?

VII – 6 METHODE *Ebenen*



VII – 6 BEISPIEL *Ebenen*

Eine Ebene geht durch den Punkt $P(-1|2|1)$ und hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in PF, NF und KF. (255/1a)

VII – 6 BEISPIEL *Ebenen*

NF: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$

KF: $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -3 - 4 + 7 = 0$

PF: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Spannvektoren müssen orthogonal zum Normalenvektor sein.

VII – 7.1 Beispiel *Ebenengleichungen*

Eine Ebene geht durch die Punkte $A(0|2|-1)$, $B(6|-5|0)$ und $C(1|0|1)$. Bestimmen Sie die KF. (258/1a)

VII – 7.1 Beispiel *Ebenengleichungen*

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$12x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 17$

VII – 7.2 Beispiel *Ebenengleichungen*

Bestimmen Sie die Ebenengleichung in KF von:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (259/4a)

VII – 7.2 Beispiel *Ebenengleichungen*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$9x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 29$

VII – 8 Methode *Ebenen zeichnen*

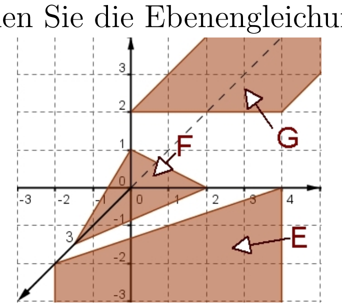
Was ist die Spurpunkteform der Ebene?
Wozu wird sie benötigt?

VII – 8 Methode *Ebenen zeichnen*

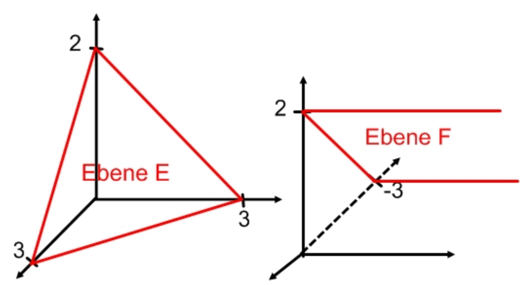
Wenn man die Koordinatenform durch d teilt, entsteht die Spurpunkteform:
E: $\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \frac{x_3}{s_3} = 1$. Die Zahlen im Nenner geben die Koordinaten der Spurpunkte an:
$S_1(s_1|0|0)$, $S_2(0|s_2|0)$ und $S_3(0|0|s_3)$.
Mit Hilfe der Spurpunkte kann man gut die Ebene ins Koordi einzeichnen.
Falls es nur zwei Spurpunkte gibt, ist die Ebene parallel zu einer Koordinatenachse.
Falls es nur einen Spurpunkt gibt, ist die Ebene parallel zu einer Koordinatenebene.

VII – 8 Beispiel *Ebenen zeichnen*

(a)Zeichne folgende Ebenen in ein Koordi:
E: $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$
und F: $3x_1 - 4,5x_3 = -9$ ((261/1bf)
(b) Bestimmen Sie die Ebenengleichungen:



VII – 8 Beispiel *Ebenen zeichnen*



(a)

(b) G: $x_3 = 2$; E: $x_1 + x_2 = 4$;
F: $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6$

VII – 9 METHODE *Schnitt E & g*

Wie geht man vor, wenn man eine Ebene mit einer Gerade schneidet?

 7

VII – 9 METHODE *Schnitt E & g*

1. Gerade als laufenden Punkt P_t denken / schreiben.

2. Die Koordinaten von P_t in die Ebenengleichung (in KF!) einsetzen. Die entstehende Gleichung in t muss man lösen $\Rightarrow\ t_0$.

3. Die Zahl t_0 in die Gerade / den laufenden Punkt einsetzen, dann erhält man den Schnittpunkt $S = P_{t_0}$.

 7 - LÖSUNG

VII – 9 BEISPIEL *Schnitt E & g*

Bestimmen sie die gemeinsamen Punkte der Geraden g und der Ebene E.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und

E: $5x_2 - 7x_3 = 13$. (263/1b)

 11

VII – 9 BEISPIEL *Schnitt E & g*

$5(6+2t) - 7(2+3t) = 13 \Leftrightarrow\ t = \frac{3}{11}$

$S\left(4\frac{3}{11}|6\frac{6}{11}|2\frac{9}{11}\right)$

 11 - LÖSUNG

VII – 10 METHODE *Schnitt E & F*

Wie geht man vor, wenn man eine Ebene E mit einer Ebene F schneidet?

 8

VII – 10 METHODE *Schnitt E & F*

1. Beide Ebenen müssen in der KF vorliegen.

2. Beide Gleichungen stellen ein LGS dar:
2 Gleichungen, 3 Variablen. Man muss also eine Variable eliminieren. Dann hat man eine Gleichung in zwei Variablen.
Eine der beiden Variable kann man als t umbenennen und muss nun die beiden anderen Variablen in Abhängigkeit von t schreiben.
3. Es entsteht eine Schnittgerade.

Bemerkung: Falls $E \parallel F$, muss $\overrightarrow{n_E} = k \cdot \overrightarrow{n_F}$ sein. Dann gibt es keine Schnittgerade.

 8 - LÖSUNG

VII – 10 BEISPIEL *Schnitt E & F*

Bestimmen Sie den Schnitt von:
(a) E: : $x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$
und F: $6x_1 + x_2 - x_3 = -7$. (267/1d)

(b) E: : $4x_2 = 5$ und
F: $6x_1 + 5x_3 = 0$ (267/1g)

 12

VII – 10 BEISPIEL *Schnitt E & F*

(a) s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$

(b) s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,25 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

 12 - LÖSUNG

VIII – 1 Methode $d(P,E)$

Beschreiben Sie, wie man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E **ohne HNF** bestimmt.

 1

VIII – 1 Methode $d(P,E)$

1. Man erstellt die Lotgerade h: $\vec{x} = \vec{p} + t\overrightarrow{n_E}$
2. Man bildet den Schnittpunkt $h \cap E = \{F\}$ genauer, man benötigt nur $t_0 = \dots$
3. Man bestimmt die Länge des Vektors: $d(P,E) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = |t_0 \cdot \overrightarrow{n_E}| = |t_0| \cdot |\overrightarrow{n_E}|$.

Hinweis: Man muss F ist nicht unbedingt aufschreiben!

 1 - Lösung

VIII – 1 Beispiel $d(P,E)$

Berechnen Sie den Abstand von A zu E (ohne HNF). (281/1a)

E: $3x_2 + 4x_3 = 0$ und $A(3|-1|7)$

 1

VIII – 1 Beispiel $d(P,E)$

$F(3|-4|3)$; der Abstand beträgt 5

 1 - Lösung

VIII – 2 Methode $d(P,E)$

Wie bestimmt man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E **mit HNF**?

 2

VIII – 2 Methode $d(P,E)$

Für die Ebene E
in KF mit: $\vec{x} \bullet \overrightarrow{n_E} = d$ gilt:

Formel: $d(P,E) = \dfrac{|\vec{p} \bullet \overrightarrow{n_E}| - d}{|\overrightarrow{n_E}|}$

 2 - Lösung

VIII – 2 Beispiel $d(P,E)$

Berechnen Sie den Abstand von A zu E (mit HNF). (284/1c)

E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} = 0$ und $A(2|-1|2)$

 2

VIII – 2 Beispiel $d(P,E)$

$d = 0$, d.h. der Punkt A liegt in der Ebene E

 2 - Lösung

VIII – 3 Methode $d(P,g)$

Beschreiben Sie zwei Methoden, wie man den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g bestimmen kann.

VIII – 3 Methode $d(P,g)$

1. Hilfsebene
1.1. Hilfsebene $H \perp\ g$ durch P: $(\vec{x} - \vec{p}) \bullet \overrightarrow{r_g} = 0$
1.2. $H \cap\ g = \{F\}$ Fußpunkt
1.3. $d(g,P) = d(F,P) = |\overrightarrow{PF}|$

2. laufender Verbindungsvektor $\overrightarrow{v_t}$ (orthogonal)
2.1. $\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{Q_tP}$
2.2. $\overrightarrow{Q_tP} \perp \overrightarrow{r_g}$, also: $\overrightarrow{Q_tP} \bullet \overrightarrow{r_g} = 0$. Gl. in t lösen.
2.3. Lösung t_0 führt zum Fußpunkt F und es gilt: $d(g,P) = d(F,P) = |\overrightarrow{PF}|$.

3. laufender Verbindungsvektor $\overrightarrow{v_t}$ (Minimax)
$d(t) = |\overrightarrow{Q_tP}| \to$ GTR: Minimum bestimmen.

VIII – 3 Beispiel $d(P,g)$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes R von der Geraden g auf zwei Arten. (287/2b)

$R(9|4|9)$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

VIII – 3 Beispiel $d(P,g)$

$d = \sqrt{289} = 17$

VIII – 4.1 Methode $d(g,h)$

Beschreibe, wie man (nur) den Abstand von zwei windschiefen Geraden g und h bestimmt.
Wichtiger Hinweis: Die Fußpunkte müssen nicht bestimmt werden !!!

VIII – 4.1 Methode $d(g,h)$

1. Hilfsebene H, die die Gerade g enhält und den Richtungsvektor von h.
$\overrightarrow{n_H} = \overrightarrow{r_g} \times \overrightarrow{r_h}$
$(\vec{x} - \overrightarrow{p_g}) \bullet \overrightarrow{n_H} = 0$ in KF schreiben.
2. $d(g,h) = d(P_h, H)$ (Formel mit HNF)

VIII – 4.1 Beispiel $d(g,h)$

Bestimme den Abstand der beiden windschiefen Geraden. (290/1c)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

VIII – 4.1 Beispiel $d(g,h)$

H: $x_1 - x_2 - x_3 = -8$; $\quad d(g,h) = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

VIII – 4.2 Methode $d(g,h)$

Beschreibe, wie man die beiden Punkte bestimmt, in denen zwei windschiefe Geraden g und h einen kürzesten Abstand haben.

 5

VIII – 4.2 Methode $d(g,h)$

1. Doppelt laufender Verbindungsvektor zwischen dem laufenden Punkt P_t von g und Q_s von h aufstellen: $\overrightarrow{v_{t,s}}$.

2. Orthogonalitätsbedingungen: $\overrightarrow{v_{t,s}} \perp \overrightarrow{r_g}$ und $\overrightarrow{v_{t,s}} \perp \overrightarrow{r_h}$ führen zu einem LGS (2 Gl, 2 Var: s, t).

3. LGS lösen; Ergebnisse s_0 und t_0 in die Geraden einsetzen $\hat{=}$ Fußpunkte F_g, F_h.

 5 - Lösung

VIII – 4.2 Beispiel $d(g,h)$

Bestimme die beiden Punkte, in denen die zwei windschiefe Geraden einen kürzesten Abstand haben. (290/1c)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

 5

VIII – 4.2 Beispiel $d(g,h)$

$F_g(7|5|4), F_h(5|7|6)$; Abstand der Geraden: $\sqrt{12}$

 5 - Lösung

VIII – 5 Methode $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$

Wie kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmen?

 6

VIII – 5 Methode $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$

Formel: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\alpha = \arccos(...) \quad \Rightarrow 0° \leq \alpha < 180°$

 6 - Lösung

VIII – 5 Beispiel $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. (294/1c)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

 6

VIII – 5 Beispiel $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$

$\cos\alpha = \dfrac{5+9+5}{\sqrt{1+9+25} \cdot \sqrt{35}} = \dfrac{19}{35} = 0,5429$

$\alpha = 57,12°$

 6 - Lösung

VIII – 6.1 METHODE $\alpha(g,h)$

Wie bestimmt man den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden g und h?

VIII – 6.1 METHODE $\alpha(g,h)$

Formel: $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{r_g} \bullet \overrightarrow{r_h}|}{|\overrightarrow{r_g}| \cdot |\overrightarrow{r_h}|}$

$\alpha = \arccos(...) \quad \Rightarrow 0° \leq \alpha < 90°$

VIII – 6.1 BEISPIEL $\alpha(g,h)$

Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der beiden sich schneidenden Geraden. (296/1b)

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\2\\10\end{pmatrix}$

VIII – 6.1 BEISPIEL $\alpha(g,h)$

$\alpha = 30,21°$

VIII – 6.2 METHODE $\alpha(E,F)$

Wie bestimmt man den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen E und F?

VIII – 6.2 METHODE $\alpha(E,F)$

Formel: $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_E} \bullet \overrightarrow{n_F}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_F}|}$

$\alpha = \arccos(...) \quad \Rightarrow 0° \leq \alpha < 90°$

VIII – 6.2 BEISPIEL $\alpha(E,F)$

Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels zwischen E_1 und E_2. (296/2c)

$E_1: \quad 3x_1 + 5x_2 = 0$ und
$E_2: \quad 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 13$

VIII – 6.2 BEISPIEL $\alpha(E,F)$

$\alpha = 70,78°$

VIII – 6.3 Methode $\alpha(g,E)$

Wie bestimmt man den Schnittwinkel zwischen einer Geraden g und einer Ebenen E?

VIII – 6.3 Methode $\alpha(g,E)$

Formel: $\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{r_g} \bullet \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{r_g}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$

$\alpha = \arccos(...) \quad \Rightarrow 0° \leq \alpha < 90°$

VIII – 6.3 Beispiel $\alpha(g,E)$

Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ mit der Ebenen E: $6x_1 - 3x_2 = 8$. (297/3c)

VIII – 6.3 Beispiel $\alpha(g,E)$

$\alpha = 0°$, d.h. g und E sind parallel.
Da P_g nicht in E liegt gibt es also gar keinen Schnittwinkel!

VIII – 7.1 Methode $A \xrightarrow{g} A'$

Beschreiben Sie, wie man einen Punkt A an einer Geraden g spiegelt.

VIII – 7.1 Methode $A \xrightarrow{g} A'$

1. Hilfsebene H: $(\vec{x} - \vec{a}) \bullet \overrightarrow{r_g} = 0$
2. $H \cap g = \{F_g\}$
3. $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{AF_g}$

VIII – 7.1 Beispiel $A \xrightarrow{g} A'$

Gegeben ist der Punkt $A(4|-3|7)$. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A' bei der Spiegelung an der Geraden durch $P(4|12|1)$ und $Q(10|45|13)$. (301/1c)

VIII – 7.1 Beispiel $A \xrightarrow{g} A'$

Gerade $(PQ): \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\12\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\11\\4\end{pmatrix}$

Hilfeebene H: $2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 3$ (A eingesetzt)

$H \cap (PQ) \Rightarrow t_0 = -1 \Rightarrow F_g(2|1|-3)$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-10\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a'} = \vec{f_g} + \overrightarrow{AF} \Rightarrow A'(0|5|-13)$

VIII – 7.2 Methode $A \xrightarrow{E} A'$

Beschreiben Sie, wie man einen Punkt A an einer Ebene E spiegelt.

 11

VIII – 7.2 Methode $A \xrightarrow{E} A'$

1. Lotgerade l: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \overrightarrow{n_E}$
2. $l \cap E \to t_0$
3. $\overrightarrow{a'} = \vec{a} + 2t_0 \cdot \overrightarrow{n_E}$

 11 - Lösung

VIII – 7.2 Beispiel $A \xrightarrow{E} A'$

Gegeben ist der Punkt $A(4|-3|7)$. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A' bei der Spiegelung an der Ebenen E:
$x_1 + x_2 - x_3 + 8 = 0$. (301/1b)

 11

VIII – 7.2 Beispiel $A \xrightarrow{E} A'$

$$t_0 = -\frac{2}{3}; \qquad A'\left(2\frac{2}{3}|-4\frac{1}{3}|8\frac{1}{3}\right)$$

 11 - Lösung

VIII – Zusatz Methode $\vec{a} \times \vec{b}$

Was beschreiben anschaulich die Formeln
(a) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ bzw.

(b) $|(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|$ und

(c) $\frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|$?

Erkläre mit einer Skizze!

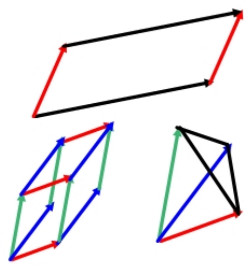
 12

VIII – Zusatz Methode $\vec{a} \times \vec{b}$

(a) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

(b) $|(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}|$ = Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelotops (Spats)

(c) $\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}|$ = Volumen der von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten dreiseitigen Pyramide.



 12 - Lösung

VIII – Zusatz Beispiel $\vec{a} \times \vec{b}$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $A(4|7|5)$, $B(0|5|9)$ und $C(8|7|3)$. (304/4a)

Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide ABCD mit $A(-7|-5|2)$, $B(1|9|6)$, $C(5|-2|-1)$ und $D(-2|0|9)$. (288/6)

 12

VIII – Zusatz Beispiel $\vec{a} \times \vec{b}$

$$A = 0,5|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD}\right| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} -54 \\ 72 \\ -144 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = 153$$

 12 - Lösung

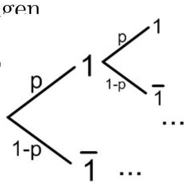
X − 1 METHODE — *Bernoulli - Formel*

a) Was ist ein Bernoulli-Versuch, was eine Bernoulli-Kette? Gib ein Beispiel!

b) Wie lautet die Formel von Bernoulli bei einer Binomialverteilung $B_{n;p}$? Erkläre die einzelnen Bestandteile der Formel

X − 1 METHODE — *Bernoulli - Formel*

a) Bernoulli-Versuch (BV)
= Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen
Bernoulli-Kette
= mehrmaliges Durchführen eines BV
Beispiel: 20maliges Würfeln mit einem Würfel; es interessiert, ob eine 1 geworfen wurde . . .



b) X $B_{n;p}$-verteilt: $\Rightarrow P(X=r) = B_{n;p}(r)$
$= \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$
Bestandteile der Formel: aus dem Baumdiagramm:
Anzahl der Pfade · Trefferkanten · Nietenkanten

X − 1 BEISPIEL — *Bernoulli - Formel*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim zwanzigmaligen Würfeln

a) genau sieben Sechsen zu werfen

b) höchstens fünf Sechsen zu werfen

c) mindestens fünf Sechsen zu werfen

d) mindestens drei und höchstens fünf Sechsen zu werfen

X − 1 BEISPIEL — *Bernoulli - Formel*

a) $P(X=7) =$ `binompdf(20,1/6,7)` $= 0{,}0259$;
b) $P(X \le 5) =$ `binomcdf(20,1/6,5)` $= 0{,}8982$;
c) $P(X \ge 4) =$ `1-binomcdf(20,1/6,4)` $= 0{,}2313$;
d) $P(3 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 2) =$
$=$`binomcdf(20,1/6,5)-binomcdf(20,1/6,2)`
$= 0{,}5695$

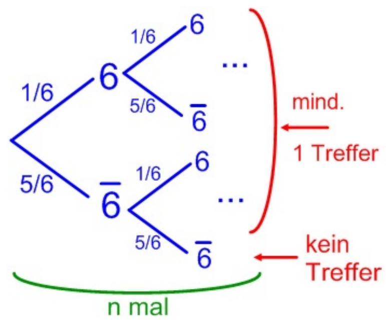
(vgl. S. 343 / Beispiel 2)

X − 2.1 BEISPIEL — *Bernoulli - Formel*

Wie oft muss man mindestens würfeln, damit man mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine Sechs würfelt?
Löse mit Hilfe dem Lösen einer Ungleichung durch Logarithmieren.

X − 2.1 BEISPIEL — *Bernoulli - Formel*

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$
$\Rightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99$
$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01$
$\Rightarrow n \geq \frac{\log 0,01}{\log \frac{5}{6}}$
$\Rightarrow n = 25,26$
also mind.
26 mal!



X − 2.2 BEISPIEL — *Bernoulli - Formel*

Wie oft muss man mindestens würfeln, damit man mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit sechs Sechser würfelt?

(346 / 4b)

X − 2.2 BEISPIEL — *Bernoulli - Formel*

Ein Würfel wird n mal geworfen, X zählt die 6er:
$\Rightarrow X$ $B_{n;1/6}$-verteilt $\quad \Leftrightarrow P(X \geq 6) \geq 99\%$
$\Leftrightarrow 1 - P(X \leq 5) \geq 0,99 \quad \Leftrightarrow P(X \leq 5) \leq 0,01$
$\Rightarrow$ laut Tabelle / GTR mit
`y1=binomcdf(x,1/6,5)`:
bei $n = 74$: $\quad P(X \leq 5) = 0,01056$;
bei $n = 75$: $\quad P(X \leq 5) = 0,00937$,
also muss man mindestens 75 mal würfeln.

Hinweis: Der Ansatz $P(X = 6) \geq 99\%$ wäre zwar von der Aufgabenstellung her möglich, hat aber keine Lösung (die Funktion `binompdf(x,1/6,6)` hat einen Hop$(35|0,1758)$).

X – 3.1 Methode — $\mu; \sigma$ *bei* $B_{n;p}$

Eine Zufallsvariable X ist $B_{n;p}-$verteilt. Was versteht man unter …

a) dem Erwartungswert μ

b) der Standardabweichung σ

Erkläre anschaulich am Schaubild. Wie lauten die entsprechenden Formeln?

 2

X – 3.1 Methode — $\mu; \sigma$ *bei* $B_{n;p}$

a) der Erwartungswert μ ist bei $B_{n;p}$ der x-Wert mit der höchsten Wahrscheinlichkeit (vgl. Glockenform).
Er wird berechnet mit $\mu = n \cdot p$

b) die Standardabweichung σ ist ein Maß für die Streuung einer Zufallsvariable. Je kleiner σ, desto weniger streuen die Werte um den Erwartungswert.
Rechts und links des Hochpunktes befinden sich eine Art Wendepunkte im Abstand σ.
Sie wird berechnet mit $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

 2 - Lösung

X – 3.1 Beispiel — $\mu; \sigma$ *bei* $B_{n;p}$

Ein Würfel wird 600 mal geworfen, X zählt die 6er. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

(349 / Beispiel a)

 4

X – 3.1 Beispiel — $\mu; \sigma$ *bei* $B_{n;p}$

$\mu = 100; \sigma = 9,1$

 4 - Lösung

X – 3.2 Methode — *Sigma-Regel*

Was versteht man unter der Sigma-Regel? Wann ist diese Regel sinnvollerweise nur anwendbar?

 3

X – 3.2 Methode — *Sigma-Regel*

Das Intervall um den Erwartungswert $[\mu - k\sigma; \mu + k\sigma]$ wird als $k\sigma$-Intervall bezeichnet.

Für die Wahrscheinlichkeiten dieser Intervalle gelten bei der Binomialverteilung Näherungswerte:
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68\%$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$

Diese Näherungswerte sind für eine binomialverteilte Zufallsvariable erst ab $\sigma > 3$ brauchbar.

 3 - Lösung

X – 3.2 Beispiel — *Sigma-Regel*

Ein Würfel wird 600 mal geworfen, X zählt die 6er. Berechne die Wahrscheinlichkeit des 2σ-Intervalls.

(349 / Beispiel b)

 5

X – 3.2 Beispiel — *Sigma-Regel*

$$P(X \in 2\sigma-\text{Intervall}) = P(X \in [81,8; 118,2])$$
$$= P(82 \leq X \leq 118) = 0,9575$$

 5 - Lösung

X – 3.3 METHODE *Zusatz: $\mu;\sigma$ allgemein*

Zusatz:

Wie sind der Erwartungswert und die Standardabweichung bei einer beliebig verteilten Zufallsvariable X definiert?

X – 3.3 METHODE *Zusatz: $\mu;\sigma$ allgemein*

Erwartungswert
$\mu = \Sigma$ Werte $x_i \cdot P(X = x_i)$

Standardabweichung
$\sigma = \sqrt{\text{Varianz}} = \sqrt{v}$

Varianz
$v = \Sigma$ (Wert $x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$
(gewichtete quadratische Abweichung!)

X – 3.3 BEISPIEL *Zusatz: $\mu;\sigma$ allgemein*

Bestimme μ und σ bei folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	30%	8%	1%	1%	10%	50%

Berechne auch die Wahrscheinlichkeit des 1σ-Intervalls.

X – 3.3 BEISPIEL *Zusatz: $\mu;\sigma$ allgemein*

$\mu = 1 \cdot 30\% + 2 \cdot 8\% + \ldots + 6 \cdot 50\% = 4,03$

$v = (1 - 4,03)^2 \cdot 30\% + (2 - 4,03)^2 \cdot 8\% + \ldots$
$\ldots + (6 - 4,03)^2 \cdot 50\% = 2,164$

$\sigma = \sqrt{2,164} = 1,471$

$P(X \in 1\sigma) = P(2,529 \le X \le 5,471) =$
$P(3 \le X \le 5) = 12\%$

Bemerkung: Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist fast das Gegenteil der Glockenkurve. Deshalb ist eine Sigma–Regel nicht anwendbar!

X – 4 METHODE *Signifikanztest*

a) Wie führt man einen zweiseitigen Signifikanztest zum Testen einer (Null-) Hypothese $H_0 : p = p_0$ durch?

b) Was ist der Unterschied zwischen dem Signifikanzniveau γ und der Irrtumswahrscheinlichkeit α?

X – 4 METHODE *Signifikanztest*

1. Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau γ (z.B.: 5%) festlegen
2. Die Zufallsvariable X ist nun $B_{n;p_0}$-verteilt!
3. Man bestimmt den linken Ablehnungsbereich $\mathbb{B}_l = [0; a-1]$, d.h. es muss gelten: $P(x \le a-1) \le 0,5 \cdot \gamma$
4. Man bestimmt den rechten Ablehnungsbereich $\mathbb{B}_r = [b+1; n]$, d.h. es muss gelten: $P(x \ge b+1) \le 0,5 \cdot \gamma$
5. Der Annahmebereich ist damit $\mathbb{A} = [a; b]$.
6. Man führt eine Stichprobe durch und entscheidet, ob man H_0 annimmt oder ablehnt.

Irrtumswahrscheinlichkeit:
$\alpha = P(X \in \mathbb{B}_l) + P(X \in \mathbb{B}_r)$; es gilt $\alpha < \gamma$.

X – 4 BEISPIEL *Signifikanztest*

Bei einem Bernoulli-Versuch wird ein zweiseitiger Signifikanztest für die Nullhypothese $H_0 : p = 0,3$ auf dem Signifikanzniveau 5% (bzw. 1%) durchgeführt.
Bestimmen Sie den Annahmebereich und die Irrtumswahrscheinlichkeit für einen Stichprobenumfang von $n = 200$.

(354 / 6a)

X – 4 BEISPIEL *Signifikanztest*

5%: $\mathbb{A} = [48; 73]$; $\alpha = 4,50\%$
1%: $\mathbb{A} = [44; 77]$; $\alpha = 0,85\%$

X – 5 METHODE *einseitiger Test*

Wie führt man einen links- (rechts-) seitigen Signifikanztest zum Testen einer (Null-) Hypothese $H_0 : p = p_0$ durch?

X – 5 METHODE *einseitiger Test*

1. n und Signifikanzniveau (z.B. $\gamma = 5\%$) festlegen
2. Die Zufallsvariable X ist nun $B_{n;p_0}$-verteilt!
3. **a) linksseitiger Test** $H_1 : p < p_0$:
   Man bestimmt den linken Ablehnungsbereich
   $\mathbb{B} = [0; a-1]$ so dass $P(x \leq a-1) \leq \gamma$
   b) rechtsseitiger Test $H_1 : p > p_0$:
   Man bestimmt den rechten Ablehnungsbereich
   $\mathbb{B} = [b+1; n]$ so dass $P(x \geq b+1) \leq \gamma$
4. Annahmebereich $\mathbb{A} = [a; n]$ bzw. $\mathbb{A} = [0; b]$
5. Man führt eine Stichprobe durch und entscheidet, ob man H_0 annimmt oder ablehnt.

X – 5 BEISPIEL *einseitiger Test*

Ein Medikament A heilt eine Krankheit bei 85% der Patienten. Man behauptet, ein Medikament B wirke besser und führt eine Testreihe an 108 Patienten durch.
Bei wie viel Patienten muss das Medikament B die Krankheit heilen, damit man auf einem Signifikanzniveau von 5% (bzw. 1% ; 0,1%) bei Medikament B von einer besseren Wirkung als bei Medikament A ausgehen kann.
(359 / 10)

X – 5 BEISPIEL *einseitiger Test*

$n = 108; H_0 : p = 0,85;$
$H_1 : p > 0,85$, also rechtsseitiger Test
$\Rightarrow$ `y1=binomcdf(108,0.85,x)` und Tabelle

c	97	98	99	100	101	102
$P(X \leq c)[\%]$	94,4	97,1	98,7	99,4	99,8	99,9

5%-Niveau: Es soll gelten: $P(X \leq c) > 95\%$ also:
Annahmebereich von H_0 : $[0; 98]$;
Annahmebereich von H_1 : $[99; 108]$

1%-Niveau: mindestens 101 Heilungen
0,1%-Niveau: mindestens 103 Heilungen

X – 6 METHODE *Stetige Zufallsvariable*

Erläutere die Eigenschaften für eine stetige Verteilungsfunktion f über einem Intervall $I = [a; b]$ (= Wahrscheinlichkeitsdichte):

a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

c) für $r, s \in I; r < s$ gilt:
$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x)\,dx$

X – 6 METHODE *Stetige Zufallsvariable*

a) die Funktionswerte sind stets positiv; damit wird die Wahrscheinlichkeit für ein Teilintervall (= ein Integral) auch positiv.
Beachte allerdings: $P(X = x_i) = 0$; anschaulich: die Wahrscheinlichkeit, genau eine Zahl (mit unendlich vielen Nachkommastellen) aus dem Intervall zu erraten ist 0.

b) Die Gesamtwahrscheinlichkeit über dem Intervall beträgt 100%.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen r und s annehmen kann, wird mit dem Integral berechnet. Die Ränder (also $X = r$ bzw. $X = s$) spielen keine Rolle!

X – 6 BEISPIEL *Stetige Zufallsvariable*

a) Bestätige, dass f mit $f(x) = \frac{105}{128}x^2(x-2)^4$ über $I = [0; 2]$ eine stetige Verteilungsfunktion ist.

b) Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für f sowie die Wahrscheinlichkeit für das 1σ-Intervall.
Tipp: $\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$; $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$

c) Warum ist der Hochpunkt $H(0,67|115\%)$ kein Widerspruch zur Maximalgrenze von 100% für Wahrscheinlichkeiten?

X – 6 BEISPIEL *Stetige Zufallsvariable*

a) Die Bedingungen (f positiv; Gesamtintegral 100%) sind erfüllt.

b) $\mu = 0,75; \sigma = \sqrt{0,10417} = 0,3227$
$P(1\sigma\text{-Intervall}) =$
$= P(0,4273 < X < 1,10727) = 0,6564$

c) Alle Integrale über Teilintervalle sind kleiner als 100%. Ein einzelner Funktionswert ist unwichtig.

X – 7 Methode $\varphi_{\mu;\sigma}(x)$

a) Erläutere, ausgehend von der Funktion $f(x) = a \cdot e^{-k \cdot x^2}$ die Bedeutung der Parameter bei der Gaußschen Glockenfunktion

$$\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

b) Wo liegen der Hochpunkt und die beiden Wendestellen der Glockenkurve?

X – 7 Methode $\varphi_{\mu;\sigma}(x)$

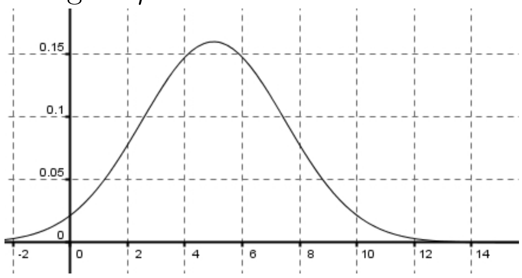
a) Die zur y-Achse symmetrische Glockenkurve f wird mit dem Faktor $k = \frac{1}{2\sigma^2}$ in x-Richtung gestreckt ($\hat{=}$ Einstellung der Streuung).
Außerdem wird mit dem Faktor a (= Streckung in y-Richtung) sichergestellt, dass die Gesamtfläche 100% beträgt.
Ferner wird eine Verschiebung der Kurve um μ in x-Richtung vorgenommen ($\hat{=}$ Einstellung des Maximums beim Erwartungswert).

b) Der Hochpunkt liegt an der Stelle $x_H = \mu$, die beiden Wendestellen in $x_{W_{1,2}} = \mu \pm \sigma$.

X – 7 Beispiel $\varphi_{\mu;\sigma}(x)$

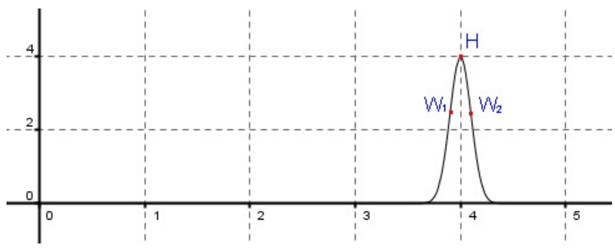
a) Skizziere $\varphi_{4;0,1}$ und bestimme den Hochpunkt und die beiden Wendepunkte.

b) Bestimme grob μ und σ aus der Skizze:



X – 7 Beispiel $\varphi_{\mu;\sigma}(x)$

a)



$H(4|4); W_1(3.9|2,42); W_2(4,1|2,42)$

b) $\mu = 5$ und $\sigma = 2,5$

X – 8 Methode *Normalverteilung*

Was versteht man unter der Normalverteilung einer Zufallsvariablen X?

X – 8 Methode *Normalverteilung*

Eine stetige Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ, wenn sie eine Gaußsche Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt.

D.h.: Funktion $f : u \to P(X = u)$
mit $f(u) = P(X = u) = \varphi_{\mu;\sigma}(u)$

X – 8 Beispiel *Normalverteilung*

a) Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 30$ und $\sigma = 2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stichprobenwert von X im Intervall [26;34] liegt.

b) Der Spritverbrauch eines Pkw (in ℓ/100km) im Stadtverkehr ist normalverteilt mit $\mu = 8,2$ und $\sigma = 1,8$. In welchem Intervall mit Mittelpunkt μ liegt der Spritverbrauch mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%?

(371 / 5a; 8b)

X – 8 Beispiel *Normalverteilung*

a) 0,9545;
b) mit dem GTR:

```
y1=normpdf(x,8.2,1.8)
y2=fnInt(y1,x,8.2-x,8.2+x)
y3=0.8
```

dann den Schnittpunkt von `y2` und `y3` bestimmen: $S(2.307|0.8)$
also ist der Lösungsbereich:
von $8.2 - 2.307$ bis $8.2 + 2.307$, d.h. $[5.89, 10.5]$